PROBLEMATA GEOMETRICA SEXAGINTA.

Circà Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasquè præcipuè versantia.

À F. STEPHANO ANGELI

VENETO,

ORDINIS JESVATORVM S. HIERONYMI,

In Veneta Prouincia Definitore Prouinciali, elaborata.

CVM PRIVILEGIO.



VENETIIS. MDCLVIII.

Apud Andream Iulianum.

DE CONSENSV SVPERIORVM.



Illuſt.^mo & Excell.^mo D. D.

MARCO ANTONIO,

Illuſtriſsimiſque

A N T O N I O, ac

L A V R E N T I O

FRATRIBVS CORRARIIS.

FR. STEPHANVS ANGELI,
Ieſuatorum Ordinis in Veneta Prouincia
Definitor Prouincialis P. P. P.



X Geometrica arbore hos fructus ſelegi; primogenita ſanè laborum meorum indoles, ac elucubratio. Veſtræ benignitatis, Illuſtriſſimi Proceres, Numini, ac Tutamini, dicandos fore decreui. Hæc etenim feliciter exculti, erupuerunt in germina, & vſquè ad maturitatis pignora ſuccreuere. Par in omnes obſequium [illegible]ttraxit animum, nàm æquè meritò præſtatis eximij. [illegible]c Paris ille, qui potiora diuinitatis inſignia diſcreuit, [illegible]m deberetur oblatio, maieſtatis, probitatis, ac Virtu[illegible] ſingulum èx vobis, magiſquè dignum ſpecimen ſeligeret. Ergo ſingularis deuictiſſimæ meæ propenſionis, veſtrum ſtemmati, ac Nomi-

ni pariter hæc arrha sacretur. Beneficijs adstringi, an angustius, vel augustius dixerim, nequibam. Trina me humanitatis vix deuixit. Vos, qui gratiarum munus triplex, ac numerum refertis, allexistis suauiter calamum, compullistis ingenium, vt opellulæ huius verticem vestro Nomine, & titulis coronarem. Addidit adhæc calcaria, quod semper vobis studium impendi. Vobis itaquè, qui inter cælicos Veneti Emporij Heroas auitæ Nobilitatis radijs corruscatis, & indiuiduæ præstantiæ fulgetis insignibus, hoc excelsiori omnium omine ductus, primogenitè elaborata monimenta, appendo. Profectò, Nobilissimæ vestrum progeniei Maiestatem, infulatas trabeas, purpuras præclarissimas, quibus honorem auxit ANTONIVS ille CORRARIVS, vitæ sanctimonia, magis quam cognomento Eminentissimus; morum suauitate, & innocentia, potius quam Nomine FLORIDVS: Qui Iesuati amictus candorem sua purpura decorauit, vt proindè non rectè Rosa superbiat Veneris cruoribus depicta in purpuream: summum, ac Diuinum in terris Imperium, cuius, in GREGORIO XII. Pontificatu, ac præclarissimis operibus verè Maximo, diademate semel exornastis comas, sed millies promeruistis decus, perterrita mei venerabatur seruitus, tenuisquè muneris oblatam vilitatem aspernabatur animus. Sed timorem correxit impauidus; ditauit namquè munusculi inopiam summa vouentis deuotio, quæ Bruti illius quondam alumna, siluestribus tectum inuolucris, pretiosiorem exhibuit venerabundi affectus enixum. Excipite igitur hilares hoc qualecumque Votum, vestrumque dignum; cùm nec minimum spondeat, qui totum promit quod habet. Parcant vobis Parcæ, qui æternitati viuitis.

AD



AD LECTOREM.

LIBELLVM hunc Geometricum tibi propono, Benigne Lector. Versatur equidem circa res, ætate nostra, neglectas; at si alius, quam Geometricus extaret, nequaquam his temporibus adeo bonis artibus aduersis, illum tibi exhiberem. Haud ignoro, ferreo hoc sæculo, quo Mars, & Bellona vbique triumphant, exigi non animi, sed corporis vires. Verùm solius Mathesis, inter alias facultates, peculiare agnoscitur, non minus paci, quam bello inseruire. Forsitan conclamabis. Quid boni in rebus tam vilibus? in meris nugis? in tuis Problematibus. Fateor equidem Problemata hoc Libello comprehensa, nugas esse, sed nugas Geometricas, proindeque rebus etiam in alijs facultatibus eminentibus, nequaquam posthabendas. Etenim Mathesi euenit, quod in nobiliori, perfectiorique specie, respectu ignobilioris agnoscitur. Ignobilius enim indiuiduum speciei superioris; præstat perfectiori

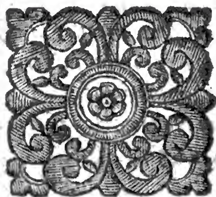
tiori

tiori speciei inferioris. Sic Geometria, adeo super cæteras humanas facultates sua extollitur certitudine, vt Geometricæ nugæ à Viris, qui propriè Viri, & non sues sint, margaritæ pretiosæ censeantur. Hæc conscribo putans aliquos meæ indolis Geometras forsitan adinueniri. Etenim res Geometricas sic esurio, vt libenter perlegam ea omnia, quæ Geometriam aliqualiter redolent. Sic puto, aliquos faciliter esse reperiendos, qui hæc, quæcumque sint, libenter percurrent, obseruentque illud Doctoris gentium pronuntiatum. Omnia probate, quod bonum est tenete. Hæc tibi communico cupiens laborum meorum aliqualiter periculum facere Etenim, si aliquando mihi compertum erit, hæc tibi haud displicuisse, forsitan alia in non modica quantitate, vel his pulchriora, vel his turpiora, aliquando communicabo.

Verùm antequam opus præcipuum aggrediar, de duobus velem te monitum esse. Primum est; Euclidianorum Elementorum citationes in hoc Libello nunquam afferri. Secundum est; Sectiones per axem in Conis, Sphæris, alijsque solidis, quamuis necessariæ pro solutione Problematum, frequenter, passimque omitti. Causa primi est. Quia cum Problemata hæc circa Conos, Sphæras, Superficies Conicas, Sphæricasque præcipuè versentur, ac proinde supponant Lectorem in doctrinis Apollonij Pergæi, & Archimedis versatum, ipsum multò magis requirunt Euclidis Elementa peroptimè callere. Præterquam quod, cùm ferè nullum verbum proferatur, quòd ab Elementis non dependeat, & attamen omnia loca afferre labor

im-

immensus censeatur, malui omnia prætermittere, quàm aliqua dumtaxat adducere. Secundum consimilem causam agnoscit, nimirum hæc conscripta esse pro Lectore aliqualiter perito, cui Sectiones per axem necessariæ, sunt obuiæ. His ergo præmissis, omissisque parergis, ad erga deueniamus. Vale.



F A-

FACVLTAS

Reuerendissimi Patris Generalis.

LAVDETVR IESVS CHRISTVS.

OPVS *inscriptum*, Sexaginta Problemata Geometrica, *compositum ab Admodum Reu. P. Stephano de Angelis Veneto professo Nostri Ordinis Iesuatorum, ac in Prouincia Veneta Definitore, concedimus Typis demandari, dummodo habeat necessarias licentias, & approbationes, quæ de iure sunt necessariæ &c. In quorum fidem præsentes manu propria subscripsimus, ac proprio Nostri Officij sigillo muniuimus.*

Datum Brixiæ in Nostro Monasterio Corporis Christi, die quarta Nouembris 1657.

Fr. Antonius Nouellus Gen. Iesuat.

Locus Sigilli.

LEM-

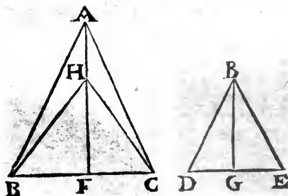


LEMMA PRIMVM.

PROPOSITIO PRIMA.

Coni habent inter ſe proportionem compoſitam ex proportione baſium, & altitudinum.

INT duo coni, B A C, D B E, quorum axes, ſeù altitudines ſint A F, B G. Dico proportionem coni A B C, ad conum B D E, componi ex proportione A F, ad B G, & ex proportione baſis B F C, ad baſim D G E.



Super baſim B C, fiat alius conus, cuius altitudo ſit

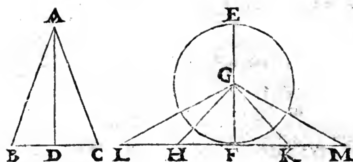
FH, ęqualis altitudini BG. Iam conus ABC, ad conum BDE, de foris sumpto cono BHC, habet proportionem compositam ex proportione coni ABC, ad conum HBC, & ex proportione coni HBC, ad conum DBE: Sed vt conus ABC, ad conum HBC, sic (propter eandem basim BFC,) altitudo AF, ad altitudinem HF, seù ad BG, ei ęqualem: & vt conus HBC, ad conum DBE, sic (propter æquales altitudines HF, & BG,) basis BFC, ad basim DGE. Ergo proportio coni BAC, ad conum DBE, componitur quoque ex proportione AF, ad BG, & ex proportione basis BFC, ad basim DGE. Quod ostendere oportebat.

LEMMA II. PROP. II.

Conus ad Sphæram habet proportionem compositam ex proportione altitudinis coni ad Semidiametrum Sphæræ, & ex proportione quadrati radij basis coni, ad quadratum Diametri Sphæræ.

SIT conus, ABC, cuius altitudo sit, AD, & sit sphæra, cuius centrum, G, diameter, EF. Dico, conum ad sphæram habere proportionem compositam, ex proportione, AD, ad, FG, & ex proportione quadrati, BD, (si, D, sit centrum basis coni) ad quadratum, EF.

Intel-



Intelligantur duo coni, quorum altitudo ſit, G F, ſemidiameter ſphæræ, & ſint, G H K, cuius baſis diameter ſit H K, æqualis, E F, & G L M, cuius baſis diameter ſit, L M, ipſius E F, dupla. Iam probatum eſt ab Archim. 1. de Sphær. & Cylindro Prop 32. conum, H G K, eſſe quartam partem ſphæræ, cuius diameter, E F; ſed etiam eſt quarta pars coni, L G M, quia, & eius baſis eſt quarta pars baſis; ergo ſphæra, & conus, L G M, ſunt æquales. Ergo conus, A B C, ad hæc duo ſolida habet eandem proportionem. Sed proportio coni ABC, ad conum, L G M, componitur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione baſis, B D C, ad baſim, L F M, nempè ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, L F, ſeù ad quadratum E F. Ergo etiam proportio coni, A B C, ad ſphæram componetur ex proportione, A D, ad, G F, & ex proportione quadrati, B D, ad quadratum, E F. Quod erat oſtendendum.

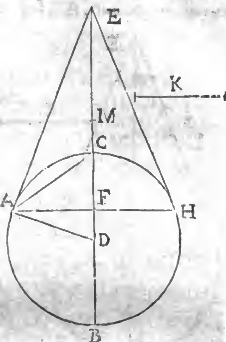
LEMMA III. PROP. III.

Conus ſua ſuperficie conica tangens Sphæram, eſt ad portionem ſphęræ ab ipſo incluſam, vt quadratum reſidui diametri ſphęræ, ad rectangulum comprehenſum ſub dicto reſiduo, & ſub ſegmento diametri intercepto inter centrum ſphæræ, & baſim coni; vna cum rectangulo ſub ſemidiametro ſphærę, & ſub prædicta intercepta.

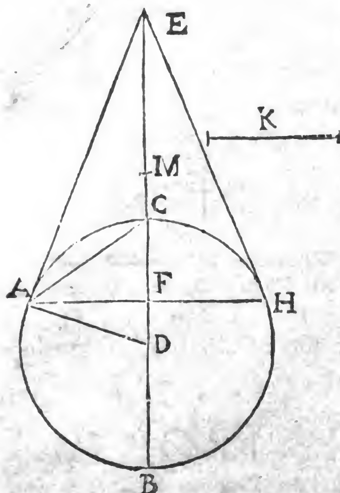
SIT Sphæra, ABHC, & ſit conus rectus, EAH, cuius ſuperficies conica tangat ſphæram; & omnia intelligantur ſecta per axim, adeò vt, ABHC, ſit circulus maximus; D, centrum; EA, EH, latera trianguli per axim; AFH, diameter baſis coni; BFCE, diameter circuli,& axis coni. Dico conum, EAH, ad portionem ſphæræ, ACH, ab ipſo comprehenſam, eſſe vt quadratum BF, ad rectangulum, BFD, cum rectangulo, BDF.

Coni

Coni ad portionem proportio componitur ex proportione coni ad ſphæram, & ſphæræ ad portionem: proportio coni ad ſphæram componitur ex proportione, EF, ad DB, & ex proportione quadrati, AF, ad quadratum, CB, ex Propoſ. antec. & pariter proportio ſphæræ ad portionem componitur ex proportione quadrati, BC, ad quadratum, CF, & ex proportione, DB, ad FB, continuatam, BD, vt deducitur ex Archi. 2. de ſphæra, & Cylin. Prop 4. Ergo ratio quoque coni, AEH, ad portionem, ACH, componetur ex quatuor rationibus; nempè ex ratione, EF, ad DB; DB, ad, FB, continuatam, BD; ex ratione quadrati, AF, ad, ad quadratum, CB; & quadrati, CB, ad quadratum, CF. Sed duæ rationes, EF, ad DB, & DB, ad FB, continuatam, BD, faciunt rationem, EF, ad FB, continuatam, DB. Et pariter duæ rationes quadrati, AF, ad quadratum, CB, & quadrati, CB, ad quadratum, CF, faciunt rationem quadrati, AF, ad quadratum, CF. Ergo proportio coni ad portionem, componetur



netur ex ratione, EF, ad, FB, continuatam, DB, & ex ratione quadrati, AF, seù rectanguli, BFC, ei æqualis, ad quadratum, FC, hoc est (propter eandem altitudinem, FC,) ex ratione, BF, ad, FC. Sed vt, EF, ad, FB, continuatam, BD, sic (sumpta, FD, communi altitudine) rectangulum, EFD, seù ei æquale, CFB, (nam ducta, AD, ob tangentem, EA, & angulum rectum, EAD, quadrato, FA, est æquale rectangulum, EFD, cui etiam quadrato, AF, est æquale rectãgulum, CFB,) ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD. Ergo proportio coni ad portionem componetur ex ratione, BF, ad, FC, & ex ratione rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD. Rursùm proportio rectanguli, CFB, ad rectangulum sub, FD, in, FB, continuatam, BD, componitur ex ratione, CF, ad, FD, & ex ratione, FB, ad, FB, continuatam, BD. Ergo à primo ad vltimum, proportio coni ad portionem componitur ex proporti one, BF, ad FC; FC, ad, FD (quæ duæ faciunt



ratio-

rationem, BF, ad, FD,) & ex ratione, BF, ad, FB, continuatam, BD. Sed istæ duæ rationes componunt rationem quadrati, BF, ad rectangulum sub, FD, in FB, continuatam, BD; quod rectangulum est postea æquale duobus rectangulis, BFD, BDF. Ergo conus ad portionem est, vt quadratum, BF, ad duo rectangula, BFD, BDF. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, quod diuidendo erit excessus coni supra portionem ad portionem, vt quadratum, BD, ad duo rectangula, BFD, BDF. Namque quadratum, BD, est excessus quadrati, BF, supra duo rectangula, BFD, BDF, vt consideranti patet.

LEMMA IV. PROP. IV.

Sit recta linea, AB, secta bifariam in C, & non bifariam in, D. Dico quadratum, AD, maius esse quã sexquitertium duorum rectangulorum, ADC, ACD.

QVoniam enim duo rectangula, ADC, ACD, sunt minora duobus rectangulis, ACB, ABC: & quadratum, AC, est tertia pars rectangulorum,

lorum, ACB, ABC; ergo erit maius quam tertia



pars rectangulorum, ACD, ADC. Ergo componendo, quadratum, AC, cum duobus rectangulis, ACD, ADC, nempè totum quadratum, AD, erit maius quam ſexquitertium rectangulorum, ACD, ADC, Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

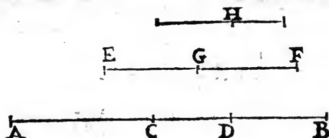
EX dictis infertur in figura Propoſ. 3. conum EAH, ad portionem, ACH, habere proportionem maiorem ſexquitertia. Nam in eadem propoſitione oſtenſum eſt conum ad portionem habere rationem quadrati, BF, ad duo rectangula, BDF, BFD. Et iam patet, BC, ſecari bifariam in, D, & non bifariam in, F.

LEMMA V. PROP. V.

Datam AB, ſectam bifariam in C, rursùm ſecare in D, inter CB, vt quadratum AD, ad duo rectangula ACD, ADC, ſit in data proportione.

Data

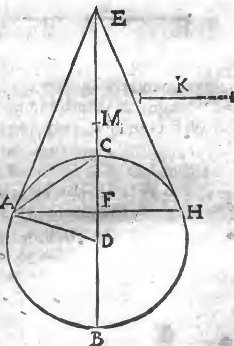
DAta proportio sit, quam habet, E F, ad F G; quam patet debere esse excessus, sed ex Lemmate anteced. minorem sesquitertia. Inter E G, E F, sit media proportionalis H. Cùm ergo E F, sit maior quam sesquitertia F G; ergo E G, erit maior subquadrupla E F; ergo erit etiam maior subdupla H. Si ergo fiat, vt E G, ad H, sic A C, ad A D, punctum D, cadet inter



C, B. Fiat ergo; & assero punctum D, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt E G, ad H, sic A C, ad A D. Ergo, & vt quadratum E G, ad quadratum H, seù, vt E G, ad E F, sic quadratum A C, ad quadratum A D. Ergo, & conuertendo, vt F E, ad E G, sic quadratum A D, ad quadratum A C. Et per conuersionem rationis, vt E F, ad F G, sic quadratum A D, ad excessum ipsius super quadratum A C, nempè ad duo rectangula A C D, A D C. Quod erat faciendum.

PROBLEMA I. PROP. VI.

Circa datam ſpheram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, cuius ſuperficies conica tangat ſuperficiem ſphæricam, & quod conus ſit ad portionem ab ipſo incluſam in data proportione.



Datæ ſphæræ ſit circulus maximus A B H C, cuius centrum D, diameter BC, & data proportio ſit, quam habet DC, ad K, quàm ex ſuperioribus patet, maiorē eſſe ſexquitertia. Tunc datam rectam CB, diuiſam bifariã in D, diuidamus rursùm in F, inter C, D, vt quadratum BF, ſit ad duo rectangula B D F, B F D, vt BC, ad K, ex Lemmate

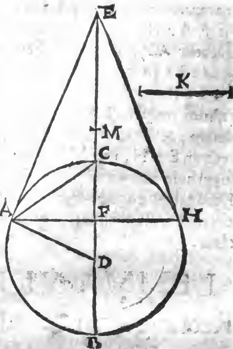
mate antecedenti; à puncto F, erigatur perpendicularis F A, vsque ad circumferentiam, & à puncto A, ducatur A E, tangens circulum, occurrens diametro productæ in E; & intelligantur omnia reuolui circa axim E B, more geometrico, donec redeant ad principium motus. Iam patet à circulo restitui sphæram datam, & à triangulo rectangulo E A F, fieri conum rectum E A H, includentem portionem A C H, & sua superficie conica tangentem superficiem sphæricam. Dico talem conum esse quæsitum. Non immoror circa demonstrationem, quia ex præmissis est nimis clara.

LEMMA VI. PROP. VII.

Rectangulum, quod fit sub tangente, & sub sinu recto alicuius arcus, est maius quadrato chordæ eiusdem arcus.

SIT circulus, cuius diameter sit B C, centrum D, A E, sit tangens arcus A C, occurrens diametro productæ in E; A F, sit sinus rectus; & A C, sit chorda eiusdem arcus. Dico rectangulum E A F, maius esse quadrato A C.

Ducatur A D; & quoniam propter angulum rectum E A D, duo triangula E A D, A D F, sunt similia. Ergo erit, vt E D, ad D A, seu ad D C, ei æqualem,



ſic D A, ſeù D C, ad D F. Ergo, & diuidendo, erit vt E C, ad C D, ſic C F, ad F D. Et permutando, erit vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F. Sed C D, eſt maior D F; ergo, & E C, erit maior C F. Ergo componendo, tota E F, erit maior dupla F C. Ergo rectangulum ſub D A, E F, maius erit rectangulo ſub D A, in duplam C F. Sed rectangulo ſub D A, in duplam C F, eſt æquale rectangulum ſub dupla D A, nempè ſub diametro B C, in C F; & huic rectangulo eſt æquale quadratum A C. Ergo rectangulum ſub D A, in E F, erit maius quadrato A C. Sed quoniam propter ſimilitudinem triangulorum D A F, E A F, rectangulum ſub D A, in E F, eſt æquale rectangulo E A F; (nam eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F;) ergo rectangulum E A F, erit maius quadrato A C. Quod erat oſtendendum.

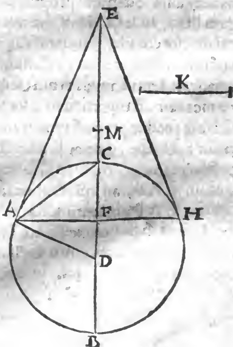
SCHO-

SCHOLIVM.

Elicitur ex dictis, & ex ostensis ab Archi., quod si tàm circulus, quàm triangulum E A F, intelligantur volui circa B E, donec redeant ad initium motus, adeò vt à circulo generetur sphæra, & à triangulo conus E A H; elicitur inquam, quod superficies conica erit maior superficie sphærica portionis ab ipso inclusa. Nam cum ostendat Archi. 1. de Sphæra, & Cylindro prop. 14. cuiuslibet coni recti superficiem esse æqualem circulo, cuius radius sit media proportionalis inter latus coni, & semidiametrum circuli basis; & pariter cum ostendat propositionibus 40. & 41. eiusdem libri, superficiem sphæricam portionis sphæræ æquale esse circulo, cuius radius sit linea ducta à polo ad circumferentiam basis; & circuli sint ad se inuicem vt quadrata semidiametrorum; sequitur, quod superficies conica erit ad superficiem sphæricam portionis, vt quadratum mediæ proportionalis inter latus, & semidiametrum suæ basis, siue erit, vt rectangulum sub latere, & semidiametro basis; hoc est in præsenti, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C. Iam verò rectangulum E A F, ostensum est maius quadrato A C; quare, & superficies conica coni E A H, erit maior superficie sphærica portionis A C H; & insuper totus perimetro coni erit maior toto perimetro portionis.

LEMMA VII. PROP. VIII.

Dati circuli diametrum producere, vt ab aliquo puncto eiusdem diametri ductis tangente, sinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum sub tangente, & sinu recto, sit ad quadratum chordæ in data ratione possibili.



SIT datus circulus, cuius diameter, BC; centrum D; oportet producere diametrum, puta in E, vt ductis tangente EA, sinu recto AF, & chorda AC; rectangulum, EAF, sit ad quadratum AC, in data proportione.

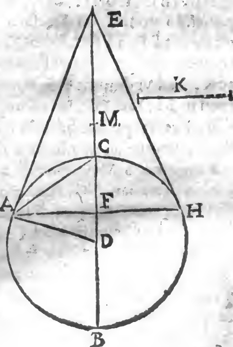
Ex dictis patet oportere proportionem datam esse maioris inæqualitatis. Sit ergo ea, quàm habet DC, ad K; fiat

K; & fiat, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F. patet D F, minorem eſſe D C; nam, cum D C, ſit maior K; ergo exceſſus duplæ D C, ſuper K; nempè exceſſus B C, ſuper K, erit multò maior K; quare, & D C, ſeù B D, erit maior D F. A' puncto ergo F, erigatur perpendicularis F A, & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E, & iungatur A C. Dico factum eſſe, quod imperebatur. Eodem proceſſu, quo factum eſt in Lemmate anteced. oſtendetur eſſe, vt E C, ad C F, ſic C D, ad D F; & componendo, vt E F, ad F C, ſic C D, cum D F, nempè B F, ad F D. Eſt autem vt B F, ad F D, ſic B C, ad K; (nam cum factum ſit, vt exceſſus B C, ſuper K, ad K, ſic B D, ad D F; erit componendo vt B C, ad K, ſic B F, ad F D.) Ergo erit etiam, vt E F, ad F C, ſic B C, ad K; & vt antecedentium dimidia, nempe vt dimidia E F, ad F C, ſic D C, ad K. Sed vt dimidia E F, ſeù vt F M (diuiſa F E, bifariam in M,) ad F C, ſic (ſumpta communi altitudine C B,) rectangulum ſub F M, in C B, ad rectangulum B C F; nempe ad quadratum A C, ei æquale; & cum rectangulo ſub M F, B C, ſit æquale rectangulum ſub E F, in dimidiam B C, nempe in A D; ergo vt D C, ad K, ſic erit rectangulum ſub E F, in D A, ad quadratum A C. Sed rectangulo ſub E F, D A, eſt æquale rectangulum E A F, quia (propter ſimilitudinem triangulorum E A F, D A F, eſt, vt A E, ad E F, ſic D A, ad A F.) ergo, & vt D C, ad K, ſic rectangulum E A F, ad quadratum A C. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA II. PROP. IX.

Circa datam ſphæram deſcribere conum rectum includentem aliquam ſphæræ portionem, & tangentem ſua ſuperficie conica ſuperficiem ſphæricam, adeò vt ſuperficies conica ſit ad ſuperficiem ſphæricam portionis ab eo incluſam in data proportione.



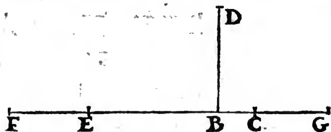
PAtet ex Scholio Propoſitionis 7. oportere proportionē datam eſſe maioris inęqualitatis. Sit ergo datæ ſphęræ circulus maximus, cuius centrum D, diameter B C, & data proportio ſit ea, quā habet D C, ad K. Diameter B C, producatur taliter in E, vt factis iiſdem, quæ in anteced. Lemmate, rectāgulum E A F, ſit ad

qua-

quadratum A C, in data proportione DC, ad K. Et intelligantur, consueto modo, omnia reuolui circa B E. Dico factum esse, quod imperebatur. Deducitur enim ex Arch. supra citato, superficiem coni, E A H, ad superficiem portionis A CH, esse, vt rectangulum E A F, ad quadratum A C; seu, ex factis, vt D C, ad K. Quod erat faciendum.

LEMMA VIII. PROP. X.

Sint EB, BD, BC, tres lineæ continue proportionales; & F B, sit maior BE; & producatur FC, in G, taliter, vt rectangulum FGC, sit æquale quadrato BD. Dico EB, maiorem esse C G.

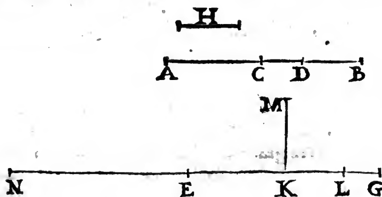


NAM rectangulum FGC, est æquale rectangulo EBC, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato DB. Ergo erit, vt FG, maior ad BC, minorem sic EB, maior ad CG, minorem. Ergo CG, est minor EB. Quod ostendere oportebat.

LEMMA IX. PROP. XI.

Datam rectam AB, sectam in puncto C, bifariam, rursum in D, inter C, B, taliter diuidere, vt rectangulum ABD, sit ad rectangulum ADC, cum rectangulo sub AB, in CD, in data proportione.

Data ratio sit, quam habet AB, ad H. Ob euitandam verò confusionem, exponatur EK, æqualis AC, quæ ex vna parte continuetur in N, vt NK, sit tripla EK; & ex alia parte continuetur in L, vt KL,



sit æqualis H; & inter EK, KL, sit media MK. Tunc (per ab alijs facta) data media proportionali MK, & data differentia extremarum NL, in ordine trium continue

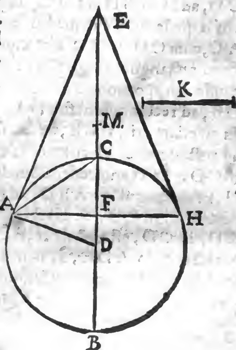
tinue proportionalium, inueniantur extremæ, quæ sint N G, G L; & ipsi G L, fiat æqualis C D, quæ per Lemma, antecedens erit minor E K, seù C B. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo rectangula E K L, N G L, sunt æqualia, quia ambo sunt æqualia eidem quadrato M K; ergo est vt N G, ad K L, sic E K, ad L G. Sed E K, est æqualis A C; K L, est æqualis H; L G, est æqualis C D; & N G, est æqualis triplæ A C, C D, & H; ergo, & vt tripla A C, cum C D, & H, ad H, sic A C, seù ei æqualis C B, ad C D. Et diuidendo, vt tripla A C, cum C D, ad H, sic B D, ad D C. Ergo factum sub extremis, erit æquale facto sub medijs; nempe factum sub tripla A C, cum C D, in C D, erit æquale facto sub D B, in H. Ergo rectangulum sub C B, in D B, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub C B, in D B, ad rectangulum sub D B, in H, est, vt C B, ad H. Ergo etiam erit, vt C B, ad H, sic rectangulum C B D, ad rectangulum sub composita ex tripla A C, cum C D, in C D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic rectangulum A B D, ad factum sub tripla A C, cum C D, in C D. Sed factum sub tripla A C, cum C D, in C D, est æquale rectangulo sub A B, in C D, & rectangulo A D C, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic erit rectangulum A B D, ad rectangula A B, C D, & A D C. Quod erat faciendum.

LEMMA X. PROP. XII.

Sit datus circulus, cuius centrum ſit D, & diameter eius BC, ſit producta in E, & à puncto E, ducantur tangens EA, & ſinus rectus AF. Dico dimidiam EF, maiorem eſſe ſinu verſo FC.

Diuidatur EF, bifariam in M. Patet enim, quod ducta AD, propter angulum rectum EAD, & propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum EAD, DAF, erit, vt ED, ad AD, ſeù ad DC, ei æqualem, ſic AD, ſeù DC, ad DF. Et diuidendo, erit vt EC, ad CD, ſic CF, ad DF. Et permutando, vt EC, ad CF, ſic CD, ad DF. Sed CD, eſt maior



DF;

DF; ergo, & EC, erit maior CF. Et consequenter, dimidia totius EF, nempe MF, erit maior CF. Quod ostendere oportebat.

LEMMA XI. PROP. XIII.

Datis ijsdem, quæ in superiori propositione, & diuisa EF, bifariam in M. Dico esse, vt MC, ad CF, sic dimidiam CF, ad FD.

QVoniam enim duo rectangula EFD, BFC, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato AF; ergo erit, vt EF, ad FC, sic BF, ad FD. Et antecedentium dimidia, nempe erit, vt MF, ad FC, sic dimidia BF, ad FD. Et diuidendo, erit, vt MC, ad CF, sic excessus dimidiæ BF, super FD, ad FD; hoc est, ita erit dimidia CF, ad FD; quia excessus dimidiæ BF, super FD, est æqualis dimidiæ CF. Quod patet, quia dimidia BF, est dimidia CD, cum dimidia DF; excessus autem dimidiæ CD, cum dimidia DF, super DF, est idem, ac excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF; cùm verò CF, sit excessus totius CD, super totam DF. Ergo, & dimidia CF, erit excessus dimidiæ CD, super dimidiam DF. Quare patet propositum.

LEM-

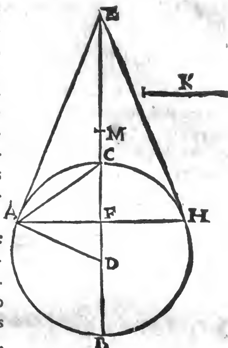
LEMMA XII. PROP. XIV.

Dati circuli diametrum taliter producere, vt ductis tangente, ſinu recto, & chorda alicuius arcus, rectangulum ſub tangente, & ſinu recto, vna cum quadrato ſinus recti, ſit ad quadrata chordæ, & ſinus recti, in data proportione.

SIT datus circulus, cuius centrum D; diameter ſit BC. Oportet ipſam diametrum taliter continuare in E, vt ductis tangente EA, ſinu recto AF, & chorda AC; rectangulum EAF, cum quadrato AF, ſit ad duo quadrata CA, AF, in data proportione.

Iam in propoſitione 7. patuit proportionem datam debere eſſe exceſſus. Quia, cum rectangulum EAF, oſtenſum ſit maius quadrato AC; etiam addito communi quadrato AF, rectangulum EAF, cum quadrato AF, erit maius duobus quadratis CA, AF. Sit ergo proportio data ea, quam habet BD, ad K; & data recta BC, ſecta bifariam in puncto D, rurſùm taliter diuidatur in pũcto F, inter C, D, vt rectangulum BCF,

ſit



ſit ad duo rectangula BC, F D, & B F D, vt duplus exceſſus D B, ſuper K, ad K, per propoſitionem vndecimã. Tunc à puncto F, erigatur diametro perpẽdicularis F A; & à puncto A, ducatur tangens A E, occurrens diametro in E; & ducatur A C. Dico iuſſum eſſe adimpletum. Diuidatur E F, in M, bifariam. Quoniam verò factum eſt, vt duplus exceſſus B D, ſuper K, ad K, ſic rectangulum B C F, ad rectangula B C, F D, & B F D; ergo, & vt antecedentium dimidia; nempe, vt exceſſus B D, ſuper K, ad K, ſic rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangula BC, FD, & BFD, nempe ad rectangulum ſub compoſita ex CB, BF, in F D. Sed, vt rectangulum ſub BC, in dimidiam CF, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in F D, ſic rectangulum BCM, ad rectangulum ſub compoſita ex BC, BF, in FC. Ratio eſt, quia proportiones horum rectangulorum componuntur ex iiſdem proportionibus. Nam ex Lemmate antecedenti, eſt, vt dimidia C F, ad F D, ſic

MC,

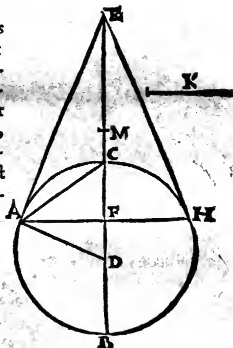
MC, ad CF; & proportio BC, ad compositam ex BC, & BF, est eadem in vtroque antecedenti ad suum consequens. Ergo, & vt excessus BD, super K, ad K, sic rectangulum BCM, ad rectangulum sub composita ex BC, BF, in FC. Ergo, & componendo, vt BD, ad K, sic rectangulum BCM, cum rectangulo sub cõposita ex BC, BF, in FC, nempe cum duobus rectangulis BCF, BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulum BCM, cum rectangulo BCF, facit vnicum rectangulum sub BC, in MF, cui postea est æquale rectangulum sub dimidia BC, nempe sub DA, in EF, duplam ipsius FM. Ergo, vt BD, ad K, sic est rectangulum sub EF, DA, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BCF, BFC. Sed rectangulo sub EF, DA, propter similitudinem triangulorum EAF, FAD, est æquale rectangulum EAF (vt sæpè dictum est.) Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum rectangulo BFC, ad duo rectangula BFC, BCF. Sed rectangulum BFC, est æquale quadrato AF, & rectangulum BCF, est æquale quadrato AC. Ergo, & vt BD, ad K, sic rectangulum EAF, cum quadrato AF, ad duo quadrata AC, AF; hoc est, ex Archimede supra citato, sic superficies conica, & basis, nempe totus perimeter coni, ad superficiem sphæricam portionis, & ad basim, hoc est ad totum perimetrum portionis. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBLEMA III. PROP. XV.

Datis iisdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem; adeò vt totus perimeter coni, sit ad totum perimetrum portionis ab eo inclusam in data proportione.

Problema ex antecedentibus Lemmatibus, & ex Archimede supra citato, est facilis solutionis; quapropter in eius solutione non est amplius immorandum, sed est relinquenda industriæ Lectoris.

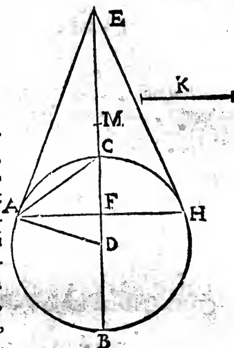


LEMMA XIII. PROP. XVI.

Sit conus E A H, cuius superficies conica tangat sphæram ACHB, modo supradicto; & ECFB, sit axis coni, & diameter sphæræ; & diametro BC, sit normalis AF, & D, si sit centrum sphæræ. Dico perimetrum residui coni, dempta portione A CH, ad perimetrum portionis A CH, esse, vt E D, cum tripla DC, ad triplam D C, cum DF.

QVoniam enim (vt deducitur ex Archimede locis supra citatis,) perimeter solidi excauati, seù residui coni, dempta portione, est ad perimetrum portionis, vt rectangulum E A F, cum quadrato A C, ad quadrata A C, A F; & cum, propter similitudinem triangulorum E A F, A F D, rectangulum E A F, sit æquale rectangulo sub A D, seù D C, in E F; & pariter, cum quadrato A F, sit æquale rectangulum B F C; & quadrato A C, sit æquale rectangulum B C F. Ergo, & vt perimeter solidi excauati ad perimetrum portionis,

nis, ſic erit rectangulum D C, E F; cum rectangulo B C F, ad duo rectangula B C F, B F C. Sed rectangulum D C, E F, diuiditur in duo rectangula D C F, & D C E; & rectangulum D C E, eſt æquale rectangulo ſub E D, in C F, (vt poſtea oſtendetur;) ergo, & perimeter ſolidi excauati erit ad perimetrũ portionis, vt rectangulum E D, C F, vna cum rectangulo D C F, & cũ rectangulo B C F, ad rectangulum B C F, cum rectangulo B F C. Sed rectangula E D, C F; D C F, & B C F, faciunt rectangulum ſub compoſita ex E D, cum tripla D C, in C F; & pariter rectangula B C F, & B F C, faciunt rectangulum ſub compoſita ex C B, B F, in F C, nempe ſub tripla C D, cum D F, in F C. Ergo erit, vt perimeter ſolidi excauati ad perimetrum portionis, ſic rectangulum ſub E D, cum tripla D C, in C F, ad rectangulum ſub tripla C D, cum D F, in C F, nempe (propter eandem altitudinem F C,) ſic E D, cum tripla D C, ad triplam D C, cum D F. Quod erat oſtendendum.



Quòd verò supra assumptum est, nempe rectangulum DCE, esse æquale rectangulo, ED, CF, patet; quia cum, ex sæpè dictis, tres ED, DC, & DF, sint continue proportionales, facilè deducitur esse, vt ED, primam ad DC, secundam, sic EC, excessum primæ super secundam, ad CF, excessum secundæ super tertiam; quare patet rectangulum ED, CF, esse æquale rectangulo DCE.

LEMMA XIV. PROP. XVII.

Data media trium quantitatum continue proportionalium, inuenire extremas, vt maior cum tripla media, sit ad triplam mediam cum minore in data proportione.



Data media sit AB, & data ratio sit, quam habet AB, ad BE, quam patet esse excessus; & inter AB, BE, sit media proportionalis H; & producatur

BA,

B A, in F, vt F B, sit tripla B A; & ab ipsa F B, auferatur F K, æqualis triplæ B E (vbicumque cadat punctum K :) deinde data media H, & differentia extremam B K, in ordiue trium continue proportionalium, inueniantur extremæ B L, L K. Patet L K, esse minorem A B, nam etiam media H, est minor ea. Fiat ergo A D, æqualis L K, & fiat, vt A D, ad A B, sic A B, ad A C. Dico tres C A, A B, A D, esse quæsitas.

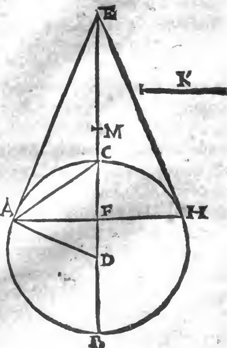
Quoniam enim quadrato H, sunt æqualia ambo rectangula B L K, & A B E; ergo ista rectangula sunt æqualia inter se; quare erit, vt B L, ad B E, sic B A, ad L K, seù ad A D, quæ L K, facta fuit æqualis. Sed B L, sunt æquales B K, cum L K, hoc est cum A D. Quare, & vt B K, cum A D, ad B E, sic B A, ad A D. Et ad consequentium tripla; ergo, vt B K, cum A D, ad triplam B E, sic B A, ad triplam A D. Sed F K, facta fuit tripla B E; ergo erit, vt K B, cùm A D, ad F K, sic A B, ad triplam A D. Et componendo, erit vt B F, cum A D, ad F K, seù ad triplam B E, sic B A, cùm tripla A D, ad triplam A D. Et ad consequentium subtripla. Ergo erit, vt F B, cum A D, ad B E, sic B A, cum tripla A D, ad A D. At verò, quoniam tres C A, A B, & A D, sunt continue proportionales, est vt B A, cùm tripla A D, ad A D, sic C A, cum tripla A B, ad A B. Ergo erit etiam, vt C A, cum tripla A B, ad A B, sic F B, cum A D, ad B E. Ergò, & permutando, erit, vt C A, cum tripla A B, ad F B, cum A D, nempe ad triplam B A, cum A D, sic A B, ad B E. Sed C A, est maior; B A, est media data, & D A, est minor. Quare factum est, quod imperebatur.

PRO-

PROBLEMA IV. PROP. XVIII.

Datis ijsdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter solidi excauati, nempe residui coni ablata portione, sit ad totum perimetrum portionis in data proportione.

DAta ratio sit, quàm habet BD, ad K: & data DC, media in ordine trium continue proportionalium inueniantur extremæ DF, minor, & DE, maior tali lege, vt sit sicut BD, ad K, sic DE, cum tripla DC, ad triplam DC, cum DF; per propositionem antecedentem. A' puncto autem F, erigatur perpendicularis diametro FA, & iungatur EA, quam patet tangere circulū, & sphæram; quia du-



cta

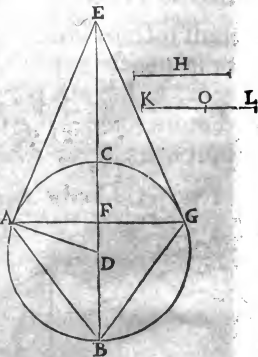
cta D A, cum sit, vt E D, ad D C, seù ad D A, sic D C, seù D A, ad D F; ergo triangula E A D, A D F, sunt similia. Vnde cum angulus A F D, sit rectus, etiam angulus E A D, erit rectus, & proinde E A, erit tangens. Cùm verò E A, tangat circulum; ergo, & superficies coni facti à triangulo E A F, tanget sphærã. Reliqua sunt nimis clara, ideò ex industria omittuntur.

PROBLEMA V. PROP. XIX.

Diametrum sphæræ datæ taliter continuare in puncto, vt à puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpẽdiculari ad diametrum, & alia ad polum alterius portionis, rhombi facti ex reuolutione circa diametrum, conus tangens ad reliquum conum sit in data proportione.

DAtæ sphæræ sit diameter B C, centrum D; oportet autem diametrum B C, taliter continuare in E, vt ducta tangente A E, dimissa perpendiculari A F, & iuncta A B, & reuoluto triangulo E A B, adeò vt fiat rhombus E A B G; conus E A G, sit ad conum A B G,

A B G, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet B D, ad H. Secetur D C, taliter in F, vt ſit ſicut B D, ad H, ſic C F, ad F D; & à puncto F, erecta normali F A, & ductis A B, & tangente A E, occurrente diametro in E; & intellectis conis EAG, B A G, ortis ex conſueta reuolutione. Dico eſſe quæſitos.



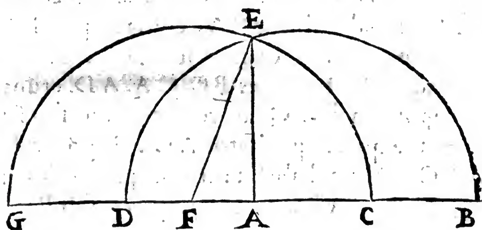
Nam, propter eãdem baſim A G, conus E A G, ad conum B A G, eſt, vt axis E F, ad axim B F. Quoniam autem rectangula E F D, B F C, ſunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato A F; eſt, vt E F, ad F B, ſic C F, ad F D; & C F, ad F D, facta eſt, ſicut B D, ad H. Ergo, & vt B D, ad H, ſic conus E A G, ad conum B A G. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XV. PROP. XX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vna parte, ſit ad quadratum alterius partis in data proportione.

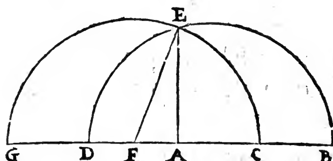
SIT data recta linea A B, & proportio data ſit ea, quam habet B A, ad A D, ei poſitam in dire-



ctum. Oportet diuidere A B, in C, vt rectangulum A B C, ſit ad quadratum A C, in data proportione. Super D B, tanquam ſupra diametrum fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur diametro perpendicularis A E; diuiſaque D A, bifariam in F, & iuncta F E, centro F, interuallo F E, fiat ſemicirculus G E C, ſecans A B, in C. Dico punctum C, eſſe quæſitum.

Duo enim rectangula G A C, B A D, ſunt æqualia

inter se, quia æqualia eidem quadrato AE. Ergo erit, vt BA, ad AC, sic GA, ad AD. Et diuidendo, vt

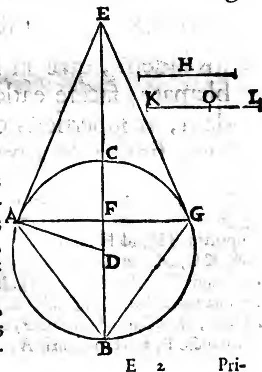


BC, ad CA, sic GD, ad DA. Sed GD, est æqualis AC, quia cum tota GF, sit æqualis totæ FC, & ablata DF, sit æqualis ablatæ FA; ergo reliqua GD, erit æqualis reliquæ AC; quare erit, & vt BC, ad CA, sic CA, ad AD. Ergo tres BC, CA, AD, erunt continue proportionales. Quare rectangulum sub BC, in DA, erit æquale quadrato AC. Ergo rectangulum ABC, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed rectangulum ABC, ad rectangulum sub BC, DA, est (propter eandem altitudinem BC,) vt BA, ad AD. Ergo, & vt BA, ad AD, sic rectangulum ABC, ad quadratum AC. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XVI. PROP. XXI.

Sit circulus, cuius centrum D, diameter B C, continuata in E; E A, ſit tangens, & A F, ſit ſinus rectus arcus A C. Dico eſſe, vt rectangulum D C F, ad rectangulum ſub dupla D F, in D F, ſic rectangulum B E C, ad rectangulum CBF.



PAtet; quia proportiones horum rectágulorũ componũtur ex iiſdem proportionibus. Nam proportio D C, ad D F, eſt eadem cum proportione E B, ad B F; & proportio C F, ad duplam D F, eſt eadem cũ proportione E C, ad C B, vt ſtatim patebit; quare patet propoſitum.

Primum ergo, nempe, quod, vt DC, ad DF, sic sit EB, ad BF; patet, quia, cum, vt sæpè dictum est, sit, ob æqualitatem rectangulorum EFD, BFC, vt EF, ad FB, sic CF, ad FD, erit componendo, vt EB, ad BF, sic CD, ad DF.

Secundum, nempè, quod sit, vt CF, ad duplam FD, sic EC, ad CB, pariter est clarum; quia cum pariter, vt sæpè dictum est, sit, vt ED, ad DC, sic DC, ad DF, erit diuidendo, vt EC, ad CD, sic CF, ad FD. Et ad consequentium dupla. Ergo vt EC, ad CB, sic CF, ad duplam FD.

PROBLEMA VI. PROP. XXII.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BD, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Data proportio BD, ad H, continuetur ad tertium terminum KL, adeò vt sit, vt BD, ad H, sic H, ad KL; diuisaque KL, bifariam in O; diuidatur etiam, per Lemma antecedens, DC, in F, adeò vt sit, sicut BD, ad KO, sic rectangulum DCF, ad quadratum DF; & à puncto F, erecta normali AF, ducta tangente EA,

EA, & factis conis E A G, B A G. Dico esse quæsitos nimirùm esse, vt B D, ad H, sic superficiem coni E A G, ad superficiem coni B A G.

Nam, cùm sit, vt B D, ad K O, sic rectangulum DCF, ad quadratum D F. Ergo, & vt B D, ad K L, duplam K O, sic rectangulum D C F, ad duo quadrata D F, seù ad rectāgulum sub dupla D F, in D F. Sed, vt rectāgulum D C F, ad rectangulum sub dupla D F, in D F, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F; ex Lemmate antecedenti. Ergo, & vt B D, ad K L, sic rectangulum B E C, ad rectangulum C B F. Sed rectangulo B E C, est æquale quadratum tangentis E A, & rectangulo C B F, est æquale quadratum B A. Ergo, & vt B D, ad K L, sic quadratum E A, ad quadratum A B. Sed, vt B D, ad K L, sic est quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, sic est quadratum E A, ad quadratum A B. Quare,

&

& vt linea B D, ad H, sic E A, ad A B. Sed (sumpta communi altitudine A F,) vt E A, ad A B, sic est rectangulum E A F, ad rectangulum B A F; vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum B A F, sic superficies conica coni E A G, ad superficiem conicam coni B A G, vt deducitur ex Archimede primo de Sphæra, & Cylindro proposit. 14. Ergo, & vt B D, ad H, sic erit superficies coni E A G, ad superficiem coni B A G. Quod erat faciendum.

PROBLEMA VII. PROP. XXIII.

Producere diametrum datæ sphæræ in puncto, vt ab illo ducta tangente, & à puncto contactus ductis sinu recto, & linea ad centrum, & ex reuolutione triangulorum, orto rhombo; coni rhombi sint in data proportione.

SIt data sphæra, cuius centrum D, & data ratio sit, quàm habet B D, ad H. Oportet producere B C, diametrum datæ sphæræ in E, vt ductis tangente E A, sinu recto A F, & semidiametro A D, & facto rhombo E A D G, conus E A G, sit ad conum A D G, vt B D, ad H.

Fiat,

Fiat, vt B D, simul cum H, ad H, sic B D, ad D K; & inter B D, D K, inueniatur media, cui sit æqualis D F; & per F, excitetur A F G, normalis B C; & à puncto A, agatur tangens A E, occurrens diametro in E; & iuncta A D, intelligatur rhombus, E A D G. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim, vt sæpè dictum est, tres E D, D C, D F, sunt continuè preportionales; & quia F D, est media inter B D, seù C D, & D K; ergo, quatuor E D, D C, D F, & D K, sunt continuè proportionales. Ergo erit, vt prima E D, ad tertiam D F, sic secunda C D, ad quartam D K. Sed, vt C D, seù B D, ad D K, sic est B D, simul cum H, ad H. Ergo, & vt E D, ad D F, sic B D, cum H, ad H. Et diuidendo, vt B D, ad H, sic E F, ad F D; nempè conus E A G, ad conum A D G, propter eandem basim A F G. Factum est ergo, quod erat faciendum.

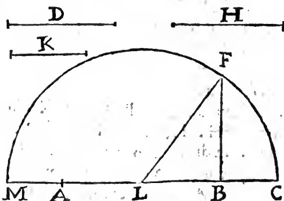
E H K C A F G D K B

LEM-

LEMMA XVII. PROP. XXIV.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt rectangulum contentum sub composita ex data, & ex producta, & sub producta, ad quadratum alterius lineæ datæ, sit in data proportione.

DAtæ duæ lineæ sint A B, & D. Oportet taliter producere A B, in C, vt rectangulum ACB, sit ad quadratum D, in data proportione, quæ sit ea,



quam habet A B, ad H. Fiat ergo, vt H, ad A B, sic D, ad K; & inter D, K, inueniatur media B F, quæ excitetur normaliter super B A, à puncto B; & diuisa A B, bifa-

bifariam L; & ducta L F, centro L, interuallo L F, describatur semicirculus; & A B, protrahatur hinc inde, donec occurrat semicirculo in punctis M C. Dico punctum C, vel punctum M, esse quæsitum. Duo enim rectangula D, K, & M B C, sunt æqualia, quia sunt æqualia eidem quadrato B F. Sed rectangulū M B C, est æquale rectangulo A C B, quia M A, est æqualis B C, & M B, est æqualis A C. Ergo etiam rectangulum D, K, erit æquale rectangulo A C B. Sed rectangulum D, K, est ad quadratum D, vt K, ad D. Ergo, & rectangulum A C B, est ad quadratum D, vt K, ad D; nempè, vt A B, ad H, (factum est enim supra conuertendo, vt A B, ad H, sic K, ad D.) Quod erat faciendum.

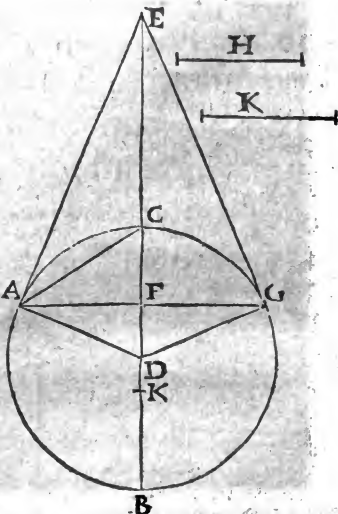
PROBL. VIII. PROP. XXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ supra, vt superficies coni E A G, sit ad superficiem coni A D G, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet B D, ad H, quæ continuetur ad K, adeò vt sit, vt B D, ad H, sic H, ad K. Per Lemma autem antecedens, data B C, taliter continuetur in E, vt rectangulum B E C, sit ad quadratum semidiametri A D, vt B D, ad K; & à pun-

cto E, ducatur tangens E A, & à puncto contactus A, ducatur A F G, normalis C B; & intelligantur coni E A G, A D G, vt in schemate. Aio istos esse quæsitos.

Quoniam enim, vt B D, ad K, sic rectangulum B E C, nempè, quadratum E A, ei æquale, ad quadratum A D; & vt B D, ad K, sic quadratum B D, ad quadratum H; quare, & vt B D, quadratum, ad quadratum H, sic quadratum E A, ad quadratum A D. Vnde, & vt B D, ad H, sic erit E A, ad A D. Sed vt E A, ad A D, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectangulum D A F; & vt rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, sic, ex Archimede, supra citato, superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G; quare, & vt B D, ad H, sic superficies coni E A G, ad superficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

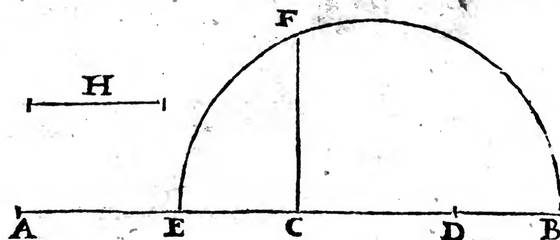


LEM-

LEMMA XVIII. PROP. XXVI.

Datam rectam lineam sectam in duas partes æquales, rursùm ipsam secare in partes inæquales, vt rectangulum sub inæqualibus totius partibus contentum ; ad quadratum segmenti intermedij, sit in data proportione.

DAta recta linea sit A B, secta bifariam in puncto C, & data proportio sit, quam habet AC, ad H.



Oportet ipsam taliter diuidere in puncto D, vt rectangulum A D B, sit ad quadratum D C, vt A C, ad H. Fiat vt A C, cùm H, ad H, sic A C, ad C E; & super diametro E B, facto semicirculo, à puncto C, erigatur perpendicularis C F, quæ erit minor C B. Fiat ergo C F, æqualis CD. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum eſt, vt A C, cum H, ad H, ſic A C, ſeù ei æqualis B C, ad C E; & vt B C, ad C E, ſic quadratum B C, ad quadratum C F, ſeù ad quadratum C D, ei æquale. Ergo, & vt A C, cum H, ad H, ſic quadratum B C, ad quadratum C D. Et diuidendo, vt A C, ad H, ſic exceſſus quadrati B C, ſuper quadratum C D, ad quadratum C D. Sed talis exceſſus eſt æqualis quadrato D B, & duobus rectangulis C D B, quæ omnia faciunt rectangulum A D B. Ergo, & vt A C, ad H, ſic rectangulum A D B, ad quadratum D C. Quod erat faciendum.

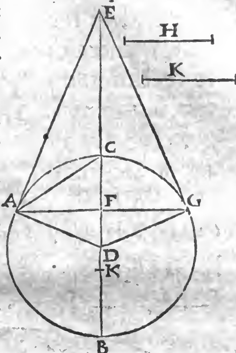
PROBLEMA IX. PROP. XXVII.

Datis iiſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem.

SIT pariter, vt in ſuperiori Problemate, data ratio, quàm habet B D, ad H; & pariter ſit continuata ad tertium terminum K, vt ſuprà factum eſt; & data recta B C, ſecta bifariam in D, rurſùm ſecetur in F, inter C, D, (per Lemma antecedens) vt rectangulum B F C, ſit ad quadratum F D, vt D B, ad K; & à puncto F, acta, more ſolito, normali A F G, & à puncto A, tangente A E, & intellectis conis E A G, A D G. Dico iſtos eſſe quæſitos. Nam cùm factum ſit, vt B D, ad K, ſic rectangulum B F C, ſeù quadratum A F, ei æquale, ad quadratum F D; & cum ſit, vt B D, ad K, ſic

qua-

quadratum B D, ad quadratum H. Ergo, & vt quadratum B D, ad quadratum H, ſic quadratum A F, ad quadratum F D; & vt linea B D, ad lineam H, ſic A F, ad F D. Sed vt A F, ad F D, ſic (propter ſimilitudinẽ triangulorum E A F, A F D,) E A, ad A D. Et vt E A, ad A D, ſic (ſumpta communi altitudine A F,) rectangulum E A F, ad rectãgulum D A F. Vt autem rectangulum E A F, ad rectangulum D A F, ità eſt ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiẽ coni D A G.



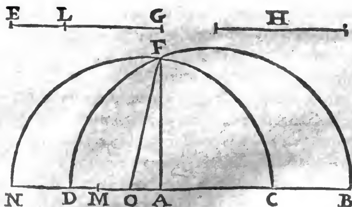
Ergo, à primo ad vltimum, erit vt B D, ad H, ſic ſuperficies coni E A G, ad ſuperficiem coni D A G. Quod erat faciendum.

(.·.)

LEM-

LEMMA XIX. PROP. XXVIII.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter diuidere in puncto, vt rectangulum ſub tota, & ſub vno ſegmento; vna cum rectangulo ſub ſegmentis, ad quadratum alterius ſegmenti, vna cum rectangulo ſub hoc eodem ſegmento, & ſub indiuiſa, ſit in data proportione.



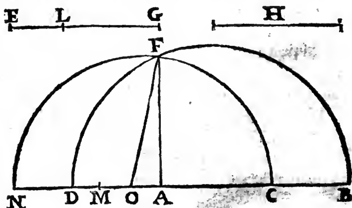
DAtæ duæ rectæ lineæ ſint AB, & EG. Oportet AB, taliter diuidere in C, vt rectangulum ABC, cum rectangulo ACB, ſit ad quadratum AC, vna cum rectangulo contento ſub AC, & ſub EG, ſit

ſit in data proportione, quæ ſit ea, quàm habet A B, ad H. Fiat ergo, vt A B, cum H, ad H, ſic B A, ad A D, ei poſitam in directum; & ſuper diametrum D B, fiat ſemicirculus; & à puncto A, erigatur A F, occurrens periphæriæ in puncto F. Pariter fiat, vt B A, cum H, ad H, ſic E G, ad G L; & E L, fiat æqualis A M, quæ diuiſa bifariam in O, & iuncta O F; centro O, interuallo O F, deſcribatur ſemicirculus N F C, ſecans A B, in C, (ſecabit enim, quia cum D A, ſit minor A B, etiam F A, erit minor A B. Cùm verò O F, ſit minor duabus O A, A F, erit multò minor duabus O A, A B, nempè O B.) Dico punctum C, eſſe quæſitum. Quoniam enim rectangula N A C, B A D, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato A F; & rectangulo N A C, eſt æqúale rectangulum M C A, quia N M, A C, ſunt æquales; & rectangulum M C A, eſt æquale rectangulo M A C, & quadrato A C; ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo M A C, & quadrato A C. Sed, cum M A, facta ſit æqualis E L; ergo rectangulum M A C, erit æquale rectangulo contento ſub E L, & A C. Ergo rectangulum B A D, erit æquale rectangulo ſub E L, in A C, & quadrato A C. Quare communi addito rectangulo ſub L G, in A C; rectangulum B A D, cum rectangulo ſub L G, in A C, erit æquale rectangulo ſub E G, in A C, vna cum quadrato A C. Quod ſeruetur.

Verùm, quoniam factum eſt, vt B A, cum H, ad H, ſic B A, ad A D; & cum ſit, vt B A, ad A D, ſic

qua-

quadratum B A, ad rectangulum B A D, (sumpta eadem altitudinem A B.) Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic quadratum B A, ad rectangulum B A D.



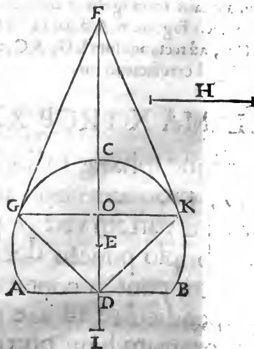
Pariter cum factum sit, vt B A, cum H, ad H, sic E G, ad G L; & vt E G, ad G L, cum ita sit (sumpta communi altitudine A C,) rectangulum E G, A C, ad rectangulum G L, A C; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Ergo in eadem proportione B A, cum H, ad H, habemus, tàm quadratum A B, ad rectangulum B A D, quàm rectangulum E G, A C, ad rectangulum L G, A C. Quare, & vt B A, cum H, ad H, sic erunt ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe quadratum A B, cum rectangulo E G, A C, ad rectangulum B A D, cum rectangulo L G, A C Sed cum rectangulis B A D, & L G, & A C, ostensa sint æqualia rectangulum E G, A C, & quadratum A C. Ergo quadratum B A, cum rectangulo E G, A C, ad hæc habe-

habebit eandem proportionem. Quare, & vt BA, cum H, ad H, ſic quadratum BA, cum rectangulo EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quare, & diuidendo, erit vt AB, ad H, ſic exceſſus quadrati BA, & rectanguli EG, AC, ſuper quadratum AC, & ſuper rectangulum EG, AC, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Sed talis exceſſus eſt æqualis rectangulis ABC, & ACB, vt conſideranti patet. Ergo, & vt AB, ad H, ſic rectangula ABC, ACB, ad rectangulum EG, AC, cum quadrato AC. Quod erat faciendum.

PROBLEMA X. PROP. XXIX.

Data portione ſphæræ maiori hemiſphærio, producere eius axim in puncto ad partem verticis portionis, vt ab ipſo puncto ducta tangente, & à puncto contactus ductis perpendiculari ad axem, & linea ad centrum baſis portionis, & ex iſtis triangulis reuolutis circa axim, facto rhombo, coni rhombi ſint ad inuicem in data proportione.

DAta portio sit A C B, maior hemisphærio, cuius axis sit C D, centrũ sphæræ E; data verò proportio sit, quàm habet C D, ad H. Oportet producere D C, in F, vt à puncto F, ducta tangente F G, & à puncto G, ductis perpendiculari G O. & G D, ad centrum basis portionis, & ex reuolutione, facto rhombo F G D K; conus F G K, sit ad conum G D K, vt C D, ad H. Sit



C L, diameter sphæræ, & datis C E, semidiametro, & E D, diuidatur taliter C E, in O, per Lemma antecedens, vt rectangula E C O, E O C, sint ad rectangulum D E O, cum quadrato O E, nempè ad rectangulum D O E, vt D C, ad H; & per punctum O, erecta perpendicu-

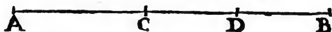
diculari GOK, & à puncto G, ducta tangente GF, intelligantur coni facti consueto modo, FGK, GDK. Dico istos esse quæsitos.

Conus FGK, ad conum GDK, ob eandem basim GOK, est, vt FO, ad OD. Sed ratio FO, ad OD, de foris sumpta OE, componitur ex ratione FO, ad OE, & ex ratione OE, ad OD. Ergo ratio coni FGK, ad conum GDK, componetur quoque ex ratione FO, ad OE, & ex ratione OE, ad OD. Sed vt FO, ad OE, sic quadratum GO, ad quadratum OE, seu rectangulum LOC, æquale quadrato GO, ad idem quadratum OE. Ergo ratio quoque coni FGK, ad conum GDK, componetur ex ratione rectanguli LOC, ad quadratum OE, & ex ratione OE, ad OD. Sed ratio rectanguli LOC, ad quadratum OE, componitur ex rationibus CO, ad OE, & LO, ad OE. Ergo ratio coni FGK, ad conum GDK, componetur quoque ex rationibus CO, ad OE, LO, ad OE, & OE, ad OD. Sed duæ rationes LO, ad OE, & OE, ad OD, faciunt rationem LO, ad OD. Ergo ratio coni FGK, ad conum GDK, componetur ex ratione CO, ad OE, & LO, ad OD. Sed istæ duæ rationes faciunt rationem rectanguli LOC, ad rectangulum DOE; & rectangulo LOC, sunt æqualia rectangula ECO, EOC, (vt consideranti patet.) Ergo, vt rectangulum ECO, cum rectangulo EOC, ad rectangulum DOE, nempè, vt DC, ad H, sic conus FGK, ad conum DGK. Quod erat faciendum.

LEMMA XX. PROP. XXX.

Sit recta linea A B, secta in duobus punctis C, D. Dico rectangulum A B C, cum rectangulo A C, B D, excedere rectāgulum A D C; rectangulis A B D, A D B.

NAM rectangulum A B C, est æquale duobus rectangulis A B D, & A B, C D; rectangulum verò A B, C D, est æquale duobus rectangulis A D C, & B D C. Ergo rectangulum A B C, excedit rectangu-

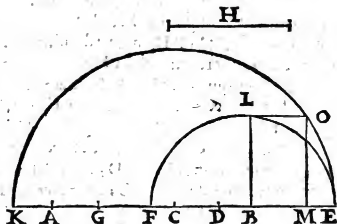


lum A D C, rectangulo A B D, & rectangulo B D C. Sed rectangulum C D B, cum rectangulum A C, D B, facit rectangulum A D B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo A C, D B, excedit rectangulum A D C, duobus rectangulis A B D, & A D B. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XXI. PROP. XXXI.

Datam rectam lineam AB, sectam in puncto C, rursùm ipsam secare in puncto D, inter C, B, vt rectangulum ABD, cum rectangulo ADB, sit ad rectangulum ADC, in data proportione.

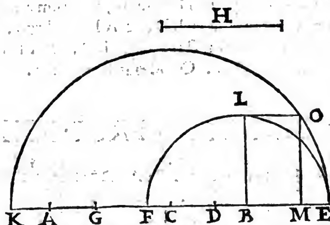


Data proportio sit, quàm habet AB, ad H; & producatur AB, in E, vt BE, sit æqualis BC; & fiat vt AB, cum H, ad H, sic AB, ad AF; & pariter sic BC, ad AG. Rursùm producatur BA, in K, vt KA, sit æqualis GF. Tunc super diametros FE, & KE, fiant semicirculi ad eamdem partem, & à puncto B, erecta BL, perpendiculari occurrente periphæriæ circuli mino-

minoris in L; per punctum L, ducatur L O, parallela KE, occurrens periphæriæ circuli maioris in O; à quo puncto O, dimittatur diametro K E, perpendicularis O M, & ipsi M E, fiat æqualis B D. Dico punctum D. esse quæsitum.

Nam, quoniam quadrata L B, & O M, sunt æqualia, etiam rectangula K M E, & F B E, istis quadratis æqualia, erunt æqualia. Sed rectangulo F B E, est æquale rectangulum F B C, quia B E, facta est æqualis B C; & rectangulo K M E, est æquale rectangulum K M, B D, quia M E, facta est æqualis B D; ergo, rectangulum F B C, erit æquale rectangulo K M, B D, nempè duobus rectágulis K B D, & M B D, in quæ diuiditur rectangulum K M, D B. At rectangulum M B D, est æquale rectangulo C D B; quia, cum B E, sit facta æqualis C B; & pariter M E, facta sit æqualis D B; ergo reliqua B M, erit æqualis reliquæ C D; & rectangulum M B D, erit æquale rectangulo C D B. Ergo, & rectangulum F B C, erit æquale rectangulis K B D, & C D B; & addito communi rectangulo A F, B C; ergo rectangulum F B C, cum rectangulo A F, B C, nempè totum rectangulum A B C, erit æquale rectangulis K B D, C D B, & A F, C B. Sed rectangulum A B C, diuiditur in duo rectangula, nempè A B D, & A B, C D; & pariter rectangulum K B D, diuiditur in rectangula K A, D B, & A B D. Ergo communi hinc inde ablato rectangulo A B D, remanet ex vna parte rectangulum A B, C D, æquale rectangulis K A, D B, C D B, & A F, C B. Sed quia K A, facta est æqualis G F, rectangulum K A, D B, erit

erit æquale rectanguto G F, D B; quare rectangulum A B, C D, erit æquale rectangulis G F, D B; C D B, & A F, C B. Rursùm rectangulum A B, C D, diuiditur in rectangula B D C, & A D C; ergo rursùm, communi ablato rectangulo B D C, rectangulum A D C, erit æquale rectangulis G F, D B, & A F, C B. Quod seruetur.



Quoniam verò factum est, vt A B, cum H, ad H, tàm tota B A, ad totam A F, quàm ablata B C, ad ablatam A G; ergo, & reliqua C A, erit ad reliquam F G, vt tota ad totam, seù vt B A, cum H, ad H · at verò, vt B A, ad A F, sic (sumpta communi altitudine B C,) rectangulum A B C, ad rectangulum A F, B C; & vt C A, ad F G, sic (sumpta communi altitudine D B,) rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B; ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic est tàm rectangulum A B C, ad rectangulum A F, C B, quàm rectangulum A C, D B, ad rectangulum G F, D B. Ergo, & vt B A, cum H, ad H, sic

H, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo rectangula A B C, & A C, D B, ad duo rectangula A F, C B, & G F, D B, nempe ad rectangulum A D C, quod supra. istis duobus rectangulis probatum est æquale. Ergò & diuidendo, vt A B, ad H, sic excessus duorum rectangulorum A B C, & A C, D B, super rectangulum A D C, ad rectangulum A D C. Sed iste excessus, in superiori Lemmate probatum est æquale duobus rectangulis A B D, & A D B. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo rectangula A B D, & A D B, ad rectangulum A D C. Quod erat faciendum.

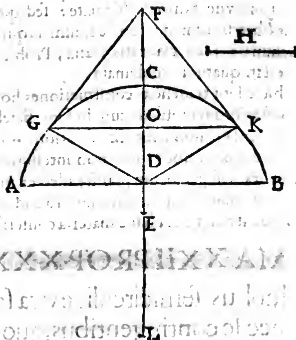
PROBLEMA XI. PROP. XXXII.

Data portione minori hemisphærio, facere eadem, quæ in superiori Problemate.

SINT data omnia, quæ in superiori Problemate, sed portio A C B, sit minor hemisphærio. Data E C, secta in puncto D, rursùm diuidatur in O, inter C, D, vt rectangula E C O, E O C, sint ad rectangulum E O D, vt E C, ad H, & à puncto O, erecta normali G O K, & à puncto G, tangente G F, intelligantur, (prius ducta G D,) coni F G K, D G K. Quos dico esse quæsitos.

Nam eodem discursu, quo factum est in superiori Pro-

Problemate, de foris sumpta O E, probabitur conum F G K, ad conum G D K, habere rationem compositam



ex ratione rectanguli L O C, ad quadratum O E, & ex ratione O E, ad O D. Et eodem modo probabitur, ex istis rationibus componi rationem rectanguli L O C, ad rectangulum E O D. Sed rectangulum L O C, est æquale rectangulis E C O, E O C. Ergo &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVatuor antecedentia Problemata potuissent proponi sub vno tanto Problemate: sed quia in quolibet horum quatuor casuum requiruntur diuersa Lemmata, ideò, claritatis gratia, Problema distinctum est in quatuor Problemata.

Pariter hic essent tradendæ constructiones horum duorum posteriorum Problematum in superficiebus conicis; sed quoniam non habemus solutionem nisi per locum solidum; & in hoc Opere non intelligimus tradere solutiones, nisi per locum planũ; ideò ex industria omittũtur; reseruando earũ traditionẽ ad aliud tempus, quo, Deo fauente, alia circa hanc materiã conscribemus.

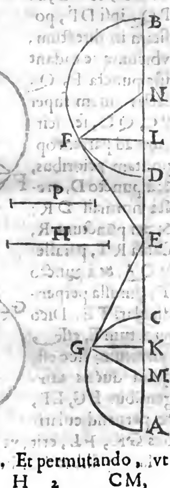
LEMMA XXII. PROP. XXXIII.

Datis duobus semicirculis extra se positis, nec se contingentibus, quorum diametri sint sibi in directum, reperire in lineà intermedia inter duos semicirculos punctum, à quo ductis tangentibus semicirculos, & à punctis cõtactus ductis sinibus rectis, abscindant isti sinus versos, seù sagittas, in data proportione.

Sint

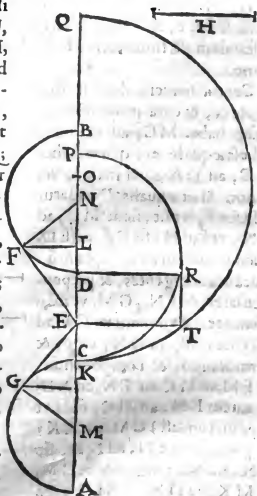
SINT dati duo semicirculi B F D, C G A, extra se positi, nec se contingentes, quorum diametri B D, C A, sint vna linea cõtinuata. Oportet in segmẽto intermedio C D, reperire punctum E, à quo ductis tangentibus E G, E F, & pariter ductis sinibus rectis G K, F L, abscindant isti sinus versos K C, D L, in data proportione.

Centra semicirculorum sint M, & N, & data proportio sit, quàm habet M C, ad H; quæ, vel est æqualis ei, quam habet M C, ad D N, vel maior, vel minor. Si sit æqualis. Diuidatur C D, in E, vt sit, sicut M C, ad D N, vel ad H, sic C E, ad E D. Dico punctum D, esse quæsitũ. Ducantur tangentes, & perpendiculares, & F N, G M, vt in schemate. Quoniam vt C E, ad E D, sic C M, ad D N; ergo, & permutando, & componendo, vt E M, ad M C, sic E N, ad N D; vt autem E M, ad M C, sic (vt sæpè dictum est) C M, ad M K; & pariter, vt E N, ad N D, sic D N, ad N L; ergo, & vt C M, ad M K, ita D N, ad N L. Ergo & per conuersionem rationis, vt C M, ad C K, sic N D, ad D L. Et permutando, vt



CM, ad N D, seù ad H, sic CK, ad DL.

Si verò proportio M C, ad H, sit minor E A, quàm habet M C, ad DN, nempè si H, sit maior N D; fiat D O, æqualis ipsi H; & fiat vt O N, ad N D, sic C M, ad D P, & O D, ad P Q, ipsi D P, positam in directum, vbicumque cadant ista puncta P, Q; factis autem super P C, Q C, semicirculis ad partem oppositam prioribus, & à puncto D, erecta normali D R; & per punctum R, ducta R T, parallela Q A; & à puncto T, dimissa perpendiculari T E. Dico punctum E, esse quæsitum; hoc est, quod ductis tangentibus E G, E F, & perpendicularibus G K, F L, erit, vt M C, ad H, sic K C, ad D L.



Iam quilibet faciliter proprio Marte potest cognoscere,

scere, quadrata DR, ET, esse æqualia, ac proinde æquale quoque esse rectangulum QEC, rectangulo PDC. Ergo, vt QE, ad PD, sic DC, ad CE. Et diuidendo, vt QP, cum DE, ad PD, sic DE, ad EC. Sed (sumpta communi altitudine ON,) vt QP, cum DE, ad PD, sic rectangula QP, ON, & DE, ON, ad rectangulum PD, ON. Ergo, vt DE, ad EC, sic rectangula QP, ON, & DE, ON, ad rectangulum DP, ON. Sed rectangulum QP, ON, est æquale rectangulo ODN, (quia supra factum est, vt ON, ad ND, sic OD, ad PQ.) Et pariter rectangulum DP, ON, est æquale rectangulo ND, CM, (quia pariter factum est supra, vt ON, ad ND, sic CM, ad DP.) Ergo, & vt DE, ad EC, sic rectangulum ODN, cum rectangulo NO, DE, ad rectangulum ND, CM. Sed vt DE, ad EC, sic est (sumpta communi altitudine ND,) rectangulum EDN, ad rectangulum ND, CE. Ergo, & vt DE, ad EC, tàm est rectangulum ODN, cum rectangulo ON, DE, ad rectangulum ND, CM, quàm rectangulum NDE, ad rectangulum ND, EC. Ergo, & vt DE, ad EC, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula ODN; NO, DE, & NDE, ad rectangula ND, CM, & ND, CE. Sed rectangula ODN; NO, DE, & NDE, faciunt rectangulum OD, NE. Et pariter rectangula ND, CM, & ND, CE, faciunt rectangulum ND, EM. Ergo, & vt DE, ad EC, sic rectangulum OD, NE, ad rectangulum ND, EM. Quod seruetur.

Rur-

Rursùm vt D E, ad E C; ſic (ſumpta cõmuni altitudine M C,) rectangulum D E, M C, ad rectangulum E C M; ergo & vt rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, E M, ſic rectangulum D E, C M, ad rectangulum E C M. Et permutando, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, ſic rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M. Sed, vt rectangulum O D, N E, ad rectangulũ D E, C M, ſic rectangulum O D N, ad rectangulum D L, M C, (vt ſtatim oſtendetur.) Et vt rectangulum N D, E M, ad rectangulum E C M, ſic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K, (vt pariter ſtatim oſtendetur.) Ergo, & vt rectangulum O D N, ad rectangulum D L, C M, ſic rectangulum

gulum N D, C M, ad rectangulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectangulũ D N, C M, nempe, vt O D, ad C M, sic rectangulum D L, C M, ad rectãgulum M C K, nempè, D L, ad C K. Ergo, & conuertendo, vt M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod &c.

Primum autem, quod assumptum est, nempè rectangulum O D, N E, ad rectangulum D E, C M, esse, vt rectangulum O D N, ad rectãgulum D L, C M: patet, quia proportiones horum rectangulorum ex iisdem proportionibus componuntur. Nam proportio D O, ad C M, est eadem in vtroque antecedente ad suum consequens. Proportio verò N E, ad E D, est æqualis proportioni D N, ad D L; quia, cum tres E N, N D, & N L, sint continue proportionales, erit, per conuersionem rationis, vt N E, ad E D, sic N D, ad D L.

Eodem pacto ostendetur secundum assumptũ, nempe esse, vt rectangulũ N D, M E, ad rectangulum E C M, sic rectangulum N D, M C, ad rectangulum M C K. Nam pariter in vtroque antecedenti ad suum consequens, est proportio N D, ad M C, reliqua verò proportio M E, ad E C, eodem modo concludetur æqualis proportioni M C, ad C K.

Si verò proportio data maior sit ea, quam habet M C, ad D N; nẽpè si H, est minor D N. Fiat ei æqualis D O; & fiat, vt N O, ad N D, sic vtraque simul O D, & C M, ad aliam; quæ, vel erit æqualis D C, vel maior, vel minor; & sic iste casus habebit tres casus.

Sit primum æqualis; & diuidatur D C, in Q, in partes consequentes proportionis; nẽpè sit, vt N O, ad N D,

sic

ſic M C, ad C Q, & D O, ad D Q; & ipſi C Q, fiat æqualis C P; & ſuper diametro D P, fiat ſemicirculus D T P, ad partem oppoſitã prioribus; ac à pũcto C, erigatur normalis C T. Patet C T, maiorem eſſe C P, ſeù C Q, & minorem C D. Fiat ei æqualis C E. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Sint ergo ductæ tangentes, & perpendiculares, vt in ſchemate. Quoniam tres P C, C T, & C D, ſunt continue proportionales. Ergo, & tres C Q, C E, & C D, eis æquales, erunt continuè proportionales. Quare erit, vt D C, ad C E, ſic C E, ad C Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C, ſic E Q, ad Q C. Et vt vnum antecedentium

B N O H L F D E Q C T K G N P A

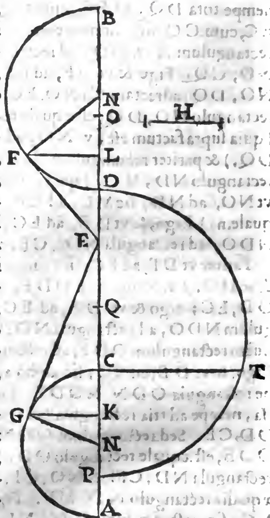
ceden-

cedentium ad vnum consequentium, nempè vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe tota D Q, ad E C, cum C Q. Sed vt D Q, ad E C, cum C Q, sic (sumpta communi altitudine N O,) rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Ergo & vt D E, ad E C, sic rectangulum N O, D Q, ad rectangula N O, E C, & N O, C Q. Sed rectangulo N O, D Q, est æquale rectangulum N D O; (quia supra factum est, vt N Q, ad N D, ita D O, ad D Q;) & pariter rectangulum N O, C Q, est æquale rectangulo N D, M C; (quia pariter supra factum est, vt N O, ad N D, sic M C, ad C P, seù ad C Q, ei æqualem.) Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M.

Pariter vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitudine D O,) rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C; ergo & vt D E, ad E C, sic est tàm rectangulum N D O, ad rectangula N O, C E, & N D, C M, quàm rectangulum O D E, ad rectangulum O D, E C. Ergo, & vt D E, ad E C, sic ambo antecedentia, nempe rectangula O D N, & O D E, ad ambo consequentia, nempe ad tria rectangula N D, C M; N O, C E, & O D, C E. Sed rectangulum O D N, cum rectangulo O D E, est æquale rectangulo O D, N E; & pariter tria rectangula N D, C M, & N O, C E, & O D, C E, sunt æqualia rectangulo N D, M E. Ergo, & vt D E, ad E C, sic rectangulum O D, N E, ad rectangulum N D, M E.

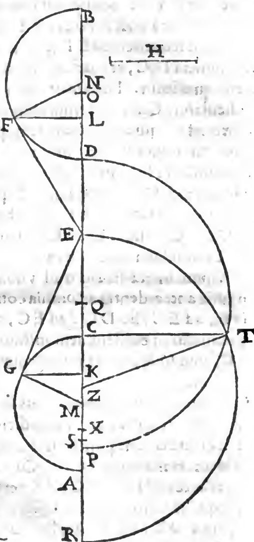
Rursùm, vt D E, ad E C, sic (sumpta communi altitudine

tudine CM,) rectangulum DE, CM; ad rectangulum ECM. Ergo, & vt rectangulū OD, NE, ad rectangulū ND, ME, sic rectangulū DE, MC, ad rectangulum ECM. Et permutando, vt rectangulum OD, NE, ad rectangulū DE, CM, sic rectangulum ND, ME, ad rectangulū ECM. Sed, vt rectangulū OD, NE, ad rectangulū DE, CM, sic rectangulum ODN, ad rectangulum DL, CM, vt patet ex probatione superiori primi assumpti; & vt rectangulum ND, ME, ad rectangulum ECM, sic rectangulum ND, MC, ad rectangulum MCK, vt patet ex probatione secundi assumpti.



Ergo

Ergo, & vt rectangulum O D N, ad rectangulum D L, C M, sic rectangulum N D, C M, ad rectãgulũ M C K. Et permutando, vt rectangulũ O D N, ad rectãgulũ N D, M C, nempe, vt D O, ad M C, sic rectangulum D L, C M, ad rectangulum M C K, nempè sic D L, ad C K. Quare, & conuertendo, vt M C, ad D O, seù ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.



SI autem illa alia sit maior D C. Sit hæc D X; & pariter D X, distinguatur in Q, in partes proportionales, nempè fiat, vt N O, ad N D, sic tàm O D, ad D Q, quã M C, ad Q X. & ipsi Q X, fiat æqualis C P, vbicumque cadant tria

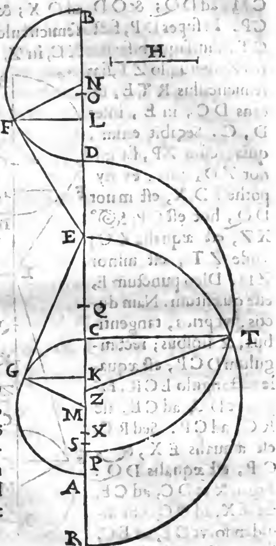
 pun-

puncta Q, X, P. Deinde super diametrum D P, fiat semicirculus D T P; & erigatur normalis C T, ac diuisa C X, bifariam in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat semicirculus E T R, qui semper secabit D C, inter puncta D, C, vt patebit inferius. Dico punctum E, esse quæsitum. Ducantur enim tangentes, & perpendiculares. Quoniam enim rectangula D C P, E C R, sunt æqualia, quia æqualia eidem quadrato C T; & cùm rectangulum R C E, sit æquale rectangulo X E C, quia, cum Z E, sit æqualis Z R, & Z X, sit æqualis Z C, ergo reliqua E C, erit æqualis reliquæ X R. Ergo, & rectangulum D C P, erit æquale rectangulo X E C. Ergo vt D C, ad C E, sic X E, ad C P, seu ad Q X, ei æqualem. Et diuidendo, vt D E, ad E C, sic E Q, ad Q X. Et vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; nempè, vt D E, ad E C, sic D Q, ad E C, cum Q X. In reliquis sequatur præcedens demonstratio, nempe, vt D Q, ad E C, cum Q X, sic (sumpta communi altitudine, O N,) &c.

Quòd verò semper semicirculus secet D C, inter C, D, patet. Quia si non secat, vel cadit in D, vel vltra D. Non in D; quia tunc punctum R, esset idem, ac P; & esset idem semicirculus D T P. Cùm ergo tota Z D, esset æqualis toti Z P; & Z C, Z X; ergo, & reliqua D C, esset æqualis reliquæ X P. Quare, addita communi C X, tota D X, esset æqualis C P. Quod implicat; quia C P, facta est æqualis tantum Q X, quæ est pars D X. Maius absurdum concluderetur si punctum E,

cade-

caderet vltra D, v. b. in L; quia tunc punctum R, caderet vltra P, puta in S; & tunc rectangulum D C P, esset æquale rectãgulo L C S, quia ambo æqualia eidẽ quadrato T C, ex hypothesi falsa. Sed rectangulo L C S, esset æquale rectangulum X L C, quia X S, est æqualis C L. Ergo rectãgulũ D C P, esset æquale rectangulo X L C. Quare, esset, vt D C, minor ad C L, maiorem sic X L, ad C P. Ergo X L, esset minor C P; cum C P, sit æqualis Q X, non solùm minor L X, sed etiam D X. Patet ergo assumptum.



SI tandem illa alia sit minor D C. Sit hæc D X; & distinguatur in Q, in

Q, in partes proportionis, vt ſit ſicut N O, ad N D, ſic C M, ad D Q; & O D, ad Q X; & D Q, fiat æqualis C P. Et ſuper D P, facto ſemicirculo, & erecta normali C T, diuiſaque bifariam X C, in Z, & iuncta Z T; centro Z, interuallo Z T, fiat ſemicirculus R T E, ſecans D C, in E, inter D, C. Secabit enim, quia, cùm Z P, ſit minor Z D, quia, ex hypotheſi D X, eſt maior D Q, hoc eſt C P; & X Z, eſt æqualis Z C; vnde Z T, eſt minor Z D. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Nam ductis, vt prius, tangentibus, & ſinibus; rectangulum D C P, eſt æquale rectangulo E C R. Ergo, vt D C, ad C E, ſic R C, ad C P. Sed R C, eſt æqualis E X, & C P, eſt æqualis D Q. Ergo, & vt D C, ad C E, ſic E X, ad D Q. Et diuidendo, vt D E, ad E C, ſic exceſſus X E, ſuper D Q, ad D Q. Et vt vnum antecedentium, ad vnum conſequentium, ita omnia ante-

tece-

tecedentia, ad omnia consequentia; nempe, vt D E, ad E C, sic excessus D X, super D Q; nempè Q X, ad D Q, cum E C. Sed, vt Q X, ad D Q, cum E C, sic (sumpta communi altitudine Q N,) &c. vt suprà factum est, & concludetur propositum. Factum est ergo in omnibus casibus, vt M C, ad H, sic K C, ad D L. Quod erat faciendum.

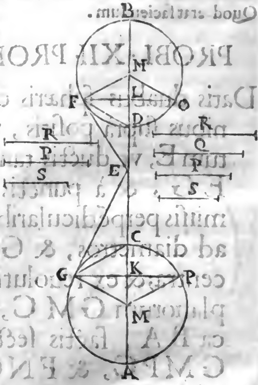
PROBL. XII. PROP. XXXIV.

Datis duabus sphæris cum conditionibus suprà positis, reperire punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G; & à punctis contactus dimissis perpēdicularibus F L, G K, ad diametros, & G M, F N, ad centra; & ex reuolutione sectorum planorum G M C, F D N, circa B A, factis sectoribus solidis G M P C, & F N O D; isti sint ad inuicem in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt C M, ad D N, sic R, ad Q; & pariter fiat, vt R, ad Q, sic Q, ad P. Deinde (intellectis prius sphæ-

ris

ris sectis per axem more solito) per Lemma antecedens, inueniatur punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & perpendicularibus GK, FL, sit, vt P, ad S, sic KC, ad DL; & intelligantur sectores, vt in schemate. Dico punctum E, esse quæsitum. Cùm enim factum sit, vt R, ad Q, sic MC, ad DN; ergo, vt quadratum R, ad quadratum Q, nempe, vt R, ad P, sic quadratum MC, ad quadratum DN. Verùm, cùm proportio R, ad S, componatur ex proportione R, ad P, & P, ad S; & vt R, ad P, sic sit quadratum MC, ad quadratum DN; & vt P, ad S, sic KC, ad DL. Ergo proportio R, ad S, componetur quoq; ex proportione quadrati



MC, ad quadratum DN, hoc est ex dupla proportione MC, ad DN, & ex proportione KC, ad DL. Sed vt vna proportio MC, ad DN, sic AC, dupla CM, ad DB, duplam DN. Ergo proportio R, ad S, componetur ex triplici proportione, nempe ex proportione

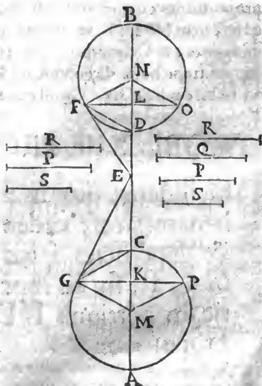
M C, ad D N, ex proportione A C, ad D B, & ex proportione K C, ad D L. Sed proportiones A C, ad D B, & K C, ad D L, faciunt rationē rectanguli A C K, ad rectangulum B D L; nempe (ductis G C, F D) quadrati G C, ad quadratum F D. Ergo proportio R, ad S, componetur ex proportione quadrati G C, ad quadratum F D, & ex proportione M C, ad D N. Sed hæ duę proportiones componunt rationem sectoris G M P C, ad sectorem N F D O, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de Sphæra, & Cylindro propos. 42. & ex nostra prima propositione huius. Ergo, vt R, ad S, sic sector G M P C, ad sectorem F D O N. Quod erat faciendum.

PROBL. XIII. PROP. XXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis G C P, sit ad superficiem sphæricam portionis F D O, in data proportione.

IVngantur F D, G C; & data proportio sit, quàm habet R, ad S; & fiat, vt A C, ad D B, sic R, ad P, &, per propositionem 33. diuidatur C D, in E, vt factis omnibus, quæ ibidem, sit, vt P, ad S, sic K C, ad D L;

& reuolutis omnibus, & factis portionibus G C P, F D O. Dico esse quæsitas. Nam proportio R, ad S, componitur ex proportione R, ad P, & ex proportione P, ad S; vt autem R, ad P, sic A C, ad D B; & vt P, ad S, sic K C, ad D L; ergo quoque proportio R, ad S, componetur ex proportione A C, ad D B, & K C, ad D L, nempe, ex proportione rectanguli A C K, ad rectangulum B D L, (cum proportiones horũ rectãgulorum componantur ex ijsdem proportionibus) ergo, vt R, ad S, sic rectãgulum A C K, ad rectangulum B D L, nempè, sic quadratũ G C, ad quadratum F D; nempè, sic superficies sphærica portionis G C P, ad superficiem sphęricã portionis F D O; vt elicitur ex Archimede primo, de Sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Ergo factum est, quod faciendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

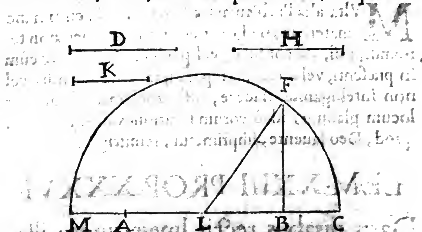
MVlta alia Problemata essent soluenda circa hanc materiam; sed quia eorum solutiones non tenemus, nisi, vel confusas, vel per locum solidũ; & cùm in præsenti, vel careamus tẽpore ipsas distinguendi, vel non intelligamus tradere, nisi Problemata soluta per locum planum; ideò eorum solutiones ad aliud opus, quod, Deo fauente, imprimetur, remittimus.

LEM. XXIII. PROP. XXXVI.

Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data cum producta, vna cum quadrato productæ, & cum rectangulo contento sub tota cum producta, & sub producta, sit ad quadratum alterius datæ lineæ in data proportione.

DAtæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; & data proportio sit, quàm habet A B, ad H; oportet producere A B, in C, vt quadratum A C, cum quadrato C B, & cum rectangulo A C B, sit ad quadratum D, vt A B, ad H. Patet proportionem A B, ad H, debere esse

maiorem ea, quàm habet quadratum A B, ad quadratum D. Fiat, vt H, ad tertiam partem A B, ſic quadra-



tum D, ad quadratum K. Patet faciliter, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius eſſe tertia parte quadrati A B. Erigatur ergo à puncto B, linea B F, perpendiculariter ſuper A B, quæ poſſit exceſſum quadrati K, ſuper tertiam partem quadrati A B; & ſecta A B, bifariam in L, & iuncta L F; centro L, interuallo L F, fiat ſemicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in punctis M, C. Dico punctum C, eſſe quæſitum. Quoniam enim rectangula M B C, & A C B, ſunt æqualia, & rectangulum M B C, eſt æquale quadrato F B; ergo rectangulum A C B, erit æquale quadrato B F. Et addita communi tertia parte quadrati A B, ergo rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B, erit æquale quadrato B F, cum tertia parte quadrati A B, nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem rationem. Sed quadratum D, factum

eſt

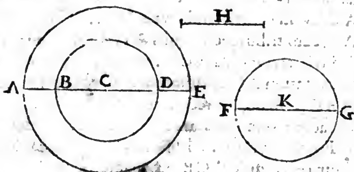
est ad quadratum K, vt H, ad tertiam partem A B. Ergo, & vt H, ad tertiam partem A B, sic quadratum D, ad rectangulum A C B, cum tertia parte quadrati A B: Ergo, & ad consequentium tripla, nempe, vt H, ad A B, sic quadratum D, ad quadratum A B, & ad tria rectangula A C B. Et conuertendo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum tribus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed tria rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt quadratum A C, quadratum C B, & vnum rectangulum A C B; nam duo rectangula A C B, cum quadrato A B, faciunt duo quadrata A C, C B, vt consideranti patet. Ergo, & vt A B, ad H, sic duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Producta est ergo A B, in C, &c. Quod erat faciendum.

PROBL. XIV. PROP. XXXVII.

Data sphæra, & data recta linea, describere orbem solidum; cuius crassities sit data linea, qui ad spheram datam, sit in data proportione possibili.

HOC Problema est determinatum, & determinatio, quæ patebit ex procesſu demonstrationis, est, quod proportio data sit maior ea, quam habet cubus

bus datæ lineę, ad cubum semidiametri sphæræ datæ. Sit data ergo sphæra, cuius semidiameter F K, & data recta linea sit A B, & oporteat facere, quod proponitur. Data proportio sit, quàm habet A B, ad



H; & data linea A B, taliter producatur in C, vt sit, sicut F K, ad H, sic quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Patet enim, ex determinatione Problematis, quod A B, poterit produci, cum proportio F K, ad H, maior sit ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Nam si esset æqualis; cum proportio A B, ad H, componatur ex proportione A B, ad F K, & F K, ad H; vt autem F K, ad H, cum sic sit, ex suppositione, quadratum A B, ad quadratum F K. Ergo proportio A B, ad H, componeretur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadrati A B, ad quadratum F K, quæ duæ faciunt rationem cubi A B, ad cubum F K; quod est contra determinationem Problematis; quia proportio A B, ad H, statuitur maior ea, quàm habet cubus A B, ad cubum F K.

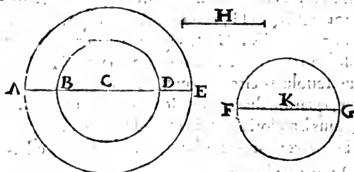
Et

Et multò maius abſurdum concluderetur, ſi proportio eſſet minor. Nam, eodem diſcurſu, concluderetur proportionem A B, ad H, minorem eſſe proportione cubi A B, ad cubum F K. Centro igitur C, interuallis A C, C B, deſcribantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus reuolutis circa diametros, deſcriptæ erunt duæ ſphæræ, quarum diametri itidem A E, B D. Si ergo intelligamus à maiori ablatam eſſe minorem, cuius diameter B D, patet relinqui orbem, cuius craſſities eſt A B. Aſſero eſſe quæſitum.

Etenim proportio A B, ad H, vt dictum eſt, de foris ſumpta F K, componitur ex proportione A B, ad F H, & F K, ad H. Vt autem F K, ad H, ſic facta ſunt duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Ergo quoque, proportio A B, ad H, componetur ex proportione A B, ad F K, & ex proportione quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K. Sed iſtæ proportiones componunt proportionem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K, (vt ſtatim patebit.) Vt autem exceſſus cubi A C, ſuper cubum C B, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram, cuius ſemidiameter F K. (Nam, vt cubus A C, ad cubum B C, ſic ſphæra A E, ad ſphæram B D. Et diuidendo, vt orbis ad ſphæram, ſic exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum B C. Vt autem cubus B C, ad cubum F K, ſic ſphæra B D, ad ſphæram F G. Ergo, ex æquali, vt exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K, ſic orbis, cuius craſſities A B, ad ſphæram F G.) Ergo, & vt A B, ad H,

ſic

ſic orbis ad ſphæram F G. Quod faciendum propo-nebatur.



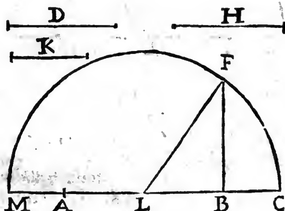
Quòd verò illæ duæ proportiones A B, ad F K, & duorum quadratorum A C, C B, cum rectangulo A C B, ad quadratum F K, componant rationem exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C, ad cubum F K; ſeù, quod factum ſub A B, in duo quadrata A C, C B, & in rectangulum A C B, ſit æquale exceſſui cubi A C, ſuper cubum B C; patet. Quia, duo quadrata A C, C B, cum rectangulo A C B, diuiduntur in quadratum A B, in tria rectangula A B C, & in tria quadrata B C; in quæ omnia ſi ducatur A B, fient, cubus A B, tria facta ſub A B, in quadratum B C, & tria facta ſub B C, in quadratum A B; nempè exceſſus cubi A C, ſuper cubum B C. Oſtenſum eſt enim ab alijs, ſed præcipuè ab incomparabili Viro Bonauentura Caualerio Præceptore meo amantiſſimo, libro ſecundo Geometriæ indiuiſibilium Propoſit. 38. quod ſi recta linea ſecta ſit in puncto, cubus totius æquatur cubis partium, & tribus factis ſub qualibet partium in quadratum reliquæ.

Quod

Quòd verò oporteat proportionem datam maiorem esse ea, quam habet cubus A B, ad cubum F K, patuit ex processu Problematis, alioquin non potuisset construi.

LEM. XXIV. PROP. XXXVIII.

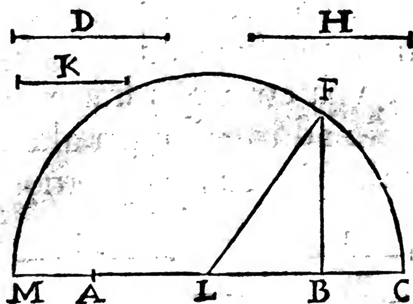
Datis duabus rectis lineis, vnam illarum taliter producere, vt quadratum compositæ ex data, & producta, vna cum quadrato productæ, sic ad quadratum alterius lineæ datę in data proportione.



Datæ duæ rectæ lineæ sint A B, & D; oportet producere A B, in C, vt duo quadrata A C, C B,

L sint

ſint ad quadratum D, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad H. Patet oportere hanc maiorem eſse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum D. Diuidatur A B, bifariam in L, & fiat, vt H, ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K. Patet, ex determinatione Lemmatis, quadratum K, maius eſse dimidio quadrati A B. Nam, ſi non eſſet maius, vel eſset æquale, vel minus. Non æquale; quia, cùm ſit, vt H,



ad B L, ſic quadratum D, ad quadratum K, nempe ad dimidium quadrati A B; eſset, & conuertendo, & vt antecedentium dupla, vt A B, ad H, ſic quadratum A B, ad quadratum D. Quòd eſt contra determinationem. Maius abſurdum concluderetur ſi ſupponeretur quadratum K, minus eſſe dimidio quadrati A B. Ergo cùm quadratum K, maius ſit dimidio quadrati A B, linea potens exceſſum quadrati K, ſuper dimidium quadrati A B, ducatur normaliter ſuper A B, à puncto B,

&

& sit B F; & iuncta L F, centro L, interuallo L F, fiat semicirculus, cui occurrat A B, hinc inde producta in M, & C. Dico punctum C, esse quæsitum.

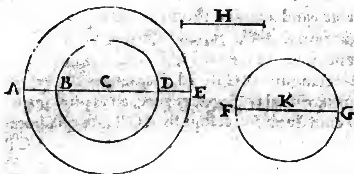
Cùm enim rectangulum M B C, seu A C B, ei æquale, sit æquale quadrato F B, addito dimidio quadrati A B; ergo rectangulum A C B, cum dimidio quadrati A B, erit æquale dimidio quadrati A B, & quadrato F B; nempè quadrato K. Ergo quadratum D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed quadratum D, ad quadratum K, est vt H, ad L B. Ergo, & conuertendo, erit etiam, vt L B, ad H, sic dimidium quadrati A B, cum rectangulo A C B, ad quadratum D. Et vt antecedentium dupla. Ergo, vt A B, ad H, sic quadratum A B, cum duobus rectangulis A C B, ad quadratum D. Sed quadratum A B, & duo rectangula A C B, faciunt duo quadrata A C, C B. Quare patet propositũ.

PROBL. XV. PROP. XXXIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter orbis, sit ad superficiem sphæræ, in data proportione.

DAta proportio sit, vt suprà, quam habet A B, ad H; quàm patebit, ex processu demonstrationis, de-

bere maiorem esse ea, quam habet quadratum A B, ad quadratum F K. Producatur A B, in C, vt duo quadrata A C, C B, sint ad quadratum F K, vt A B, ad H. Vnusquisque, ex dictis in superiori Problemate, & ex determinatione huius, potest elicere, A B, posse produci. Tunc centro C, interuallis A C, C B, describantur circuli, quorum diametri A E, B D; quibus

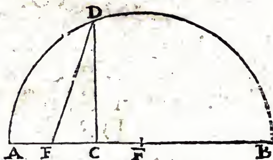


reuolutis circa A E, & intellectis omnibus, vt in superiori Problemate. Aio factum esse propositum. Nam cùm perimeter talis orbis sint duæ superficies sphæricæ, nempè interior, & exterior; superficies verò sphæricæ sint inter se, vt quadrata diametrorum, seù semidiametrorum, vt facilè elicitur ex Archimede primo de sphæra, & Cylindro proposit. 31. erit perimeter orbis, cuius crassities A B, ad superficiem sphæræ, cuius semidiameter F K, vt duo quadrata A C, C B, ad quadratum F K, nempe, vt A B, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXV. PROP. XL.

Diameter A B, ſemicirculi A D B, cuius centrum F, ſit diuiſa taliter in C, vt BC, ſit dupla C A; & erecta à puncto C, perpendiculari CD, ac diuiſa A C, bifariam in E, iunctaque E D. Dico E D, eſſe æqualem F B; & A E, cum E D, eſſe ęqualem toti CB.



QVoniam enim B A, eſt tripla A C, nempe eſt ad ipſam, vt 6, ad 2; ergo A F, dimidia A B, erit ſexquialtera A C, nempe erit ad ipſam, vt 3, ad 2. Ergo FC, eſt æqualis, tàm C E, quàm E A. Pariter, quoniam BC, eſt dupla C A; ergo, & quadratum C D, duplum erit quadrati A C, & erit octuplum quadrati

drati C E. Ergo quadratum D E, erit nonuplum quadrati E C. Sed pariter quadratum A F, seù F B, est nonuplum quadrati E C; ergo quadratum E D, erit æquale quadrato F B, & linea lineæ. Et quia pariter A E, est æqualis C F. Ergo A E, cum E D, erit æqualis C B. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

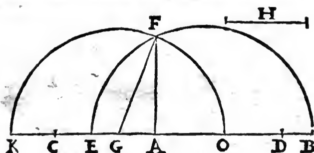
EX dictis deducitur faciliter, quod si B C, sit maior dupla A C, & fiant reliqua vt suprà; deducitur inquam, duas A E, E D, minores esse C B.

LEMMA XXVI. PROP. XLI.

Data recta C B, secta taliter in A, vt B A, sit dupla A C, inuenire punctum inter A, B, putà D, vt rectangulum C D B, sit ad quadratum D A, in data proportione.

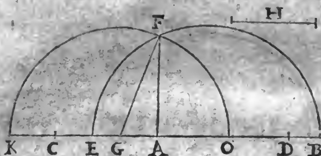
DAta proportio sit, quàm habet A B, ad H; & fiat vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic B A, ad A E, quam patet esse minorem dimidia A B, hoc est C A. Facto autem semicirculo super E B, & erecta à pun-

puncto A, perpendiculari A F, ac diuisa E A, bifariam in G, iunctaque G F; centro G, interuallo G F, describatur semicirculus K F O, producta A C, vsque ad K. Quoniam B A, est maior dupla A E, & ducta est perpendicularis A F, & diuisa est E A, bifariam in G, iunctaque est G F; ergo, per Scholium antecedentis Lemmatis, duæ E G, G F, hoc est E O, erit minor A B. Fiat ergo ipsi E O, æqualis A D. Dico punctum D, esse quæsitum; nimirum esse, vt A B, ad H, sic rectangulum C D B, ad quadratum D A.



Quoniam enim duo rectangula K A O, E A B, sunt æqualia inter se, quia sunt æqualia eidem quadrato A F; ergo communi addito rectangulo K A E, duo rectangula K A O, & K A E, nempe rectangulum sub K A, in E O, erit æquale duobus rectangulis E A B, & K A E. Sed rectangulum sub K A, in E O, est æquale quadrato K A, seu E O, quia duæ K A, & E O, sunt æquales; & quia E O, facta est æqualis A D, quadratum E O, est æquale quadrato A D; ergo quadratum A D, erit æquale rectangulo E A B, & rectangulo K A E.

K A E. Sed rectangulum K A E, est æquale rectangulo A E O, quia, vt dictum est, K A, est æqualis E O. Ergo quadratum A D, erit æquale rectangulis E A B, & A E O, nempe rectangulo sub A E, in compositam ex B A, E O, seu in compositam ex B A, A D. Ergo quadratum B A, simul cum rectangulo D A B, hoc est rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad hæc habebit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad hæc habe-



bit eandem proportionem. Sed rectangulum sub B A, in compositam ex B A, A D, ad rectangulum sub E A, in compositam ex B A, A D, est, vt B A, ad A E; & B A, ad A E, facta est, vt dupla A B, cum dupla H, ad H. Ergo, & vt dupla A B, cum dupla H, ad H, sic rectangulum sub A B, in compositam ex B A, A D, ad quadratum A D, nempe sic quadratum A B, cum rectangulo B A D, (quia rectangulum sub A B, in compositam ex B A ; A D, diuiditur in quadratum B A, & in rectangulum B A D,) ad quadratum A D. Et diuiden-

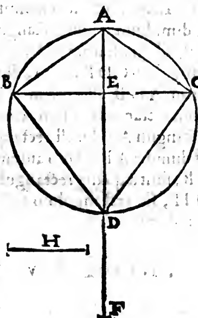
uidendo, vt dupla B A, cum H, ad H, ſic quadratum B A, cum rectangulo B D A, ad quadratum D A. Et rursùm diuidendo, vt dupla B A, ad H, ſic tria rectangula B D A, cum quadrato D B, ad quadratum A D. Et antecedentium dimidia. Ergo, vt A B, ad H, ſic dimidium trium rectangulorum A D B, & quadrati D B, ad quadratum D A. Sed horum dimidium eſt rectangulum C D B; nam, dimidium duorum rectangulorum A D B, eſt vnicum rectangulum A D B; & dimidium rectanguli A D B, cum quadrato D B, nempe rectanguli A B D, eſt rectangulum C A, D B, quia C A, eſt dimidia A B. Duo autem rectangula A D B, & C A, D B, ſunt æqualia rectangulo C D B. Ergo, & vt A B, ad H, ſic rectangulum C D B, ad quadratum A D. Quod erat faciendum.

PROBL. XVI. PROP. XLII.

Datam ſphæram, aliquo plano taliter diuidere, vt vna illius portio, ad conum ſuper eamdem baſim cum portionibus, cuius vertex ſit vertex alterius portionis, ſit in data proportione.

SIT data ſphæra, cuius diameter A D. Oportet ipſam ſecare plano B E C, cui diameter ſit perpendi-

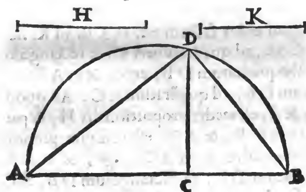
cularis, adeò vt, facto cono, cuius basis sit B E C, & c. vertex D, portio B A C, sit ad conum B D C, in data proportione. Sit hæc, quam habet A D, ad H, & producta A D, in F, vt A D, sit dupla D F, diuidatur, per propositionem antecedentem A F, in E, vt rectangulum F E A, sit ad quadratum E D, vt A D, ad H; & per punctum E, acto plano B E C, cui A D, sit normalis, & c. facto cono B D C; vt moris est. Dico factum esse propositum. Intelligatur etiam conus B A C. Portio B A C, ad conum B D C, (de foris sumpto cono B A C,) habet rationem compositam ex ratione portionis ad conum B A C, & coni B A C, ad conum B D C; sed portio B A C, est ad conũ B A C, vt F E, ad D E, vt ostenditur ab Archimede 2. de Sphæra, & Cylindro proposit. 7. & conus B A C, ad conum B D C, est, vt A E, ad E D; ergo proportio portionis B A C, ad conum B D C, componetur quoque ex proportione F E, ad E D, & A E, ad E D. Sed hæ duæ rationes componunt rationem rectanguli F E A, ad quadratum E D. Ergo portio B A C, erit ad conum B D C, vt rectangulum F E A, ad quadratum E D, seù, vt D A, ad H. Quod erat faciendum.



LEM-

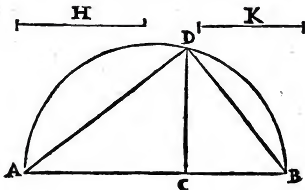
LEMMA XXVII. PROP. XLIII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data ratione, quam habet quadratum vnius lateris, ad rectangulum, sub alio latere in perpendicularem ductam ab angulo recto in hypotenusam, inuenire triangulum.



DAta hypotenusa sit A B, & data ratio sit, quam habet A B, ad H. Fiat, vt A B, ad H, sic H, ad K; deinde super A B, fiat semicirculus, & per propos. 20. huius, taliter diuidatur A B, in C, vt rectangulum A B C, sit ad quadratum A C, vt A B, ad K; & à pun-

cto C, erecto perpendiculo C D, fiat triangulum A D B. Quod affirmo esse quæsitum; nempè esse, vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C.



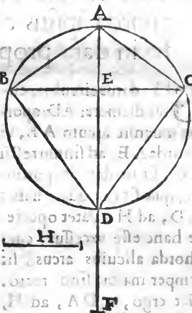
Quoniam enim factum est, vt A B, ad K, sic rectangulum A B C, ad quadratum A C; & rectangulo A B C, est æquale quadratum D B; ergo, & vt A B, ad K, sic quadratum D B, ad quadratum A C. At quoniam inter A B, & K, est media proportionalis H, & pariter inter quadrata D B, & A C, est medium proportionale rectangulum sub D B, in A C; ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum D B, A C. Sed, propter similitudinem triangulorum D B C, A D C, rectangulo D B, A C, est æquale rectangulum A D C. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum D B, ad rectangulum A D C. Factum est ergo, quod proponebatur.

PRO-

PROBL. XVII. PROP. XLIV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis B A C, sit ad superficiem conicam coni B D C, in data proportione.

DAta proportio sit pariter, quam habet A D, ad H. Data ergo diametro D A, sphæræ datæ, tamquam hypotenusa trianguli rectanguli, inueniatur triangulum rectangulum A D B, vt quadratum A B, sit ad rectãgulum D B E, vt D A, ad H, & intelligantur, portio B A C, & conus B D C. Dico plano B C, sectam esse sphæram, vt superficies portionis B A C, sit ad superficiem coni B D C, vt A D, ad H. Res est clara, quia ex Archimede sæpe, sæpius citato, vt quadratũ A B, ad rectãgulum D B E, seu, vt D A, ad H, sic superficies portionis, ad superficiem coni.



SCHO-

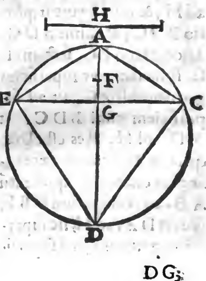
SCHOLIVM.

ARchimedes libro 2. de ſphæra, & Cylindro propoſit. 7. ſoluit hoc Problema. A data ſphæra portionem abſcindere, quæ ad conum ſuper eamdem baſim, & in eadem altitudine cum ipſa, habeat datam proportionem. Arbitror non eſſe inutile ſoluere Problema etiam quoad ſuperficies.

LEMMA XXVIII. PROP. XLV.

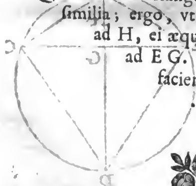
In dato circulo inuenire arcum, vt chorda ipſius ad ſinum rectum ſit in data proportione.

SIT datus circulus, cuius diameter AD; oportet inuenire arcum AE, vt chorda AE, ad ſinum rectū EG, ſit in data proportione, quæ ſit ea, quam habet AD, ad H. Patet oportere hanc eſſe exceſſus, cum chorda alicuius arcus, ſit ſemper maior ſinu recto. Fiat ergo, vt DA, ad H, ſic H, ad aliam, quæ vtique erit minor AD; ſit hæc DG;



D G; & à puncto G, ducantur G E, normalis D A, & chorda E A. Quas assero esse quæsitas. Nam D A, H, & D G, sunt tres continue proportionales. Ergo, vt D A, ad D G, sic quadratum D A, ad quadratum H. Sed pariter; vt D A, ad D G, sic (sumpta G A, communi altitudine,) est rectangulum D A G, nempe quadratum A E, ad rectangulum D G A, nempe ad quadratum E G; ergo, & vt quadratum D A, ad quadratum H, sic quadratum A E, ad quadratum E G. Ergo, & vt D A, ad H, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.

Vel sic. Quoniam H, est minor D A, ex hypothesi, aptetur ei æqualis D E, à puncto D, & ducantur E A, & perpendicularis E G, super diametrum D A.



Quoniam duo triangula A D E, A E G, sunt similia; ergo, vt A D, ad D E, seu ad H, ei æqualem, sic A E, ad E G. Quod erat faciendum.



PRO-

PROBLEMA XVIII. PROP. XLVI.

A data ſphæra portionẽ abſcindere, cuius ſuperficies ſphærica, ad ſuperficiem conicam coni in eadem baſi, & altitudine cum portione, ſit in data proportione.

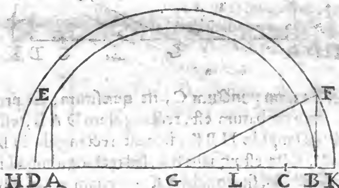
DAtæ ſphæræ, & eius circuli maximi ſit diameter D *A*, & data proportio ſit, quam habet D *A*, ad H. Per alteram verò duarum propoſitionum antecedentiũ, aptetur *A* E, & ducatur perpendicularis E G, vt *A* E, ſit ad E G, vt D *A*, ad H; & intelligantur portio, & conus E *A* C. Dico &c. Nam ſuperficies portionis eſt ad ſuperficiem coni, vt quadratum *A* E, ad rectangulum *A* E G, nempe, vt *A* E, ad E G; nempe, vt *A* D, ad H. Quod erat faciendum.

LEM-

LEMMA XXIX. PROP. XLVII.

Datam A B, taliter secare in puncto C, vt duo quadrata A B, B C, sint ad rectangulum A B C, cum quadrato B C, in data proportione.

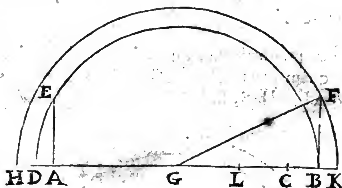
DAta proportio sit, quam habet A B, ad B L, quàm patet debere esse maioris inæqualitatis. Fiat, vt A L, ad L B, sic B A, ad A D, ei positam in di-



rectum; & super diametro D B, fiat semicirculus, cuius centrum G; & à puncto A, ducatur A E, normalis super A B, & à puncto B, erigatur pariter normalis B F, æqualis ipsi A E, & ducta G F, centro G, interuallo G F, fiat semicirculus, cuius diameter sit H K, & ipsi B K,

fiat æqualis B C, (cum B K, sit minor B A, vt ostendetur.) Dico punctum C, esse quæsitum.

In primis, quod B K, sit minor B A, patet; quia, cum duæ A E, B F, sint æquales, erunt æqualia, & illarum quadrata: quare, & rectangula H B K, D A B, erunt æqualia; & ideò erit, vt maior H B, ad minorem D A, sic maior A B, ad minorem B K.



Quòd autem punctum C, sit quæsitum, sic probabitur. Iam probatum est, rectangulum D A B, esse æquale rectangulo H B K, hoc est rectangulo H B C, quia B C, facta est æqualis B K; sed rectangulum H B C, quia (cùm H D, sit æqualis B K, est etiam æqualis B C,) est æquale rectangulo D B C, & quadrato C B; ergo rectangulum D A B, erit æquale rectangulo D B C, & quadrato B C. At rectangulum D A B, est æquale rectangulis D A C, & D A, C B; ergo, & duo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D B C, & quadrato B C. Pariter rectangulum D B C,

est

est æquale rectangulo sub D A, in B C, & rectangulo A B C; ergo rectangula D A C, & D A, C B, erunt æqualia rectangulo D A, C B, rectangulo A C B, & quadrato B C. Quare communi ablato rectangulo sub D A, in C B; rectangulum D A C, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato C B. Ergo ad hæc plana æqualia, rectangulum B A C, habebit eandem proportionem. At rectangulum B A C, ad rectangulum D A C, est vt B A, ad A D, & B A, ad A D, facta est, vt A L, ad L B; ergo, & vt A L, ad L B, sic rectangulum B A C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quare, & componendo, vt A B, ad B L, sic erit rectangulum B A C, cum rectangulo A B C, & cum quadrato B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Sed duo rectangula B A C, & A B C, faciunt quadratum B A. Ergo, & vt A B, ad B L, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

(ɩ)



LEMMA XXX. PROP. XLVIII.

Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione. Quàm proportionem habebit factum quodcumque ſub quibuslibet magnitudinibus primæ ſeriei, ad factum ſub alijs magnitudinibus eiuſdem ſeriei, ſic factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei antecedentibus homologis, ad factum ſub magnitudinibus ſecundæ ſeriei homologis conſequentibus, exiſtentibus omnibus factis homogeneis.

REM exemplifico. Sint duæ ſeries; in prima ſint quotcumque magnitudines A,B,C,& in ſecũda aliæ iſtis numero æquales D,E,F, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, nempe ſit, vt A, ad B, ſic D, ad E; & vt B, ad C, ſic E, ad F. Intelligo ergo, quod v. g. quadratum A, cum rectangulo A, B, ſit ad quadratum

A D
B E
C F

dratum C, vt quadratum D, cum rectangulo D, E, ad quadratum F; & sic in altioribus potestatibus, & in factis diuersimode. Res est facilis probatu; quia proportio primi facti ad secundum factum, componitur ex ijsdem proportionibus, ex quibus componitur proportio tertij facti ad quartum factum.

SCHOLIVM.

EX dictis infertur, quod etiam permutando, vt primum factum in prima serie, ad primum factum in secunda serie, sic secundum factum in prima serie, ad secundum factum in secunda serie, dummodo hæc omnia facta, sint homogenea.

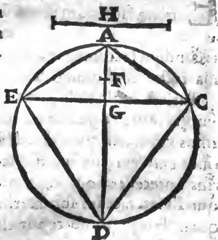
Pariter ex dictis infertur, quod si sint duo triangula similia, erit, vt quodlibet factum sub quibuslibet lateribus vnius, ad quodlibet factum sub quibuslibet lateribus eiusdem, ita quodlibet factum sub lateribus alterius antecedentibus in primo triangulo homologis, ad quodlibet factum sub lateribus alterius, itidem consequentibus in primo triangulo homologis; dummodo hæc facta, sint homogenea. Res est euidens, quia latera duorum triangulorum similium, sunt duæ series trium magnitudinum dispositæ secundum conditionem Lemmatis.

PRO-

PROBL. XIX. PROP. XLIX.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAtæ sphæræ sit circulus maximus, cuius diameter AD, & data ratio sit, quam habet AD, ad H, quæ debet esse excessus. Diuidatur AD, in F, vt quadratum AD, cum quadrato DF, sit ad rectangulum ADF, cum quadrato DF, in data ratione AD, ad H, per propositionem 47. Deinde à puncto D, aptetur DE, æqualis DF, & dimissa perpendiculari EGC, & iuncta EA, facta consueta reuolutione, intelligantur portio, & conus EAC. Dico hæc solida esse quæsita. Cùm enim factum sit, vt DA, ad H, sic duo quadrata AD, DF, ad rectangulum ADF, cum quadrato DF,



DF, nempe, (propter æqualitatem DF, DE,) duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE; & cùm (propter similitudinem triangulorum AED, AEG) sit, vt duo quadrata AD, DE, ad rectangulum ADE, cum quadrato DE, sic duo quadrata AE, EG, ad rectangulum AEG, cum quadrato EG, per Propos. anteced., nempe, ex Archimede sæpe citato, perimeter portionis EAC, ad perimetrum coni EAC. Ergo, & vt AD, ad H, sic perimeter portionis, ad perimetrum coni. Factum est ergo, quod proponebatur.

LEMMA XXXI. PROP. L.

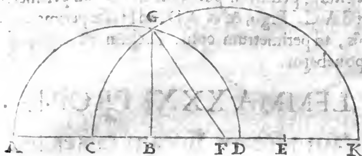
Datam rectam lineam taliter secare in puncto, vt quadratum totius, ad rectangulum sub tota, & sub vno segmento, cum quadrato eiusdem segmenti, sit in data proportione.

Data recta linea sit AB, & data proportio sit, quam habet AB, ad BD, ei positam in directum. Patet proportionem datam debere esse talis conditionis, vt AB, sit maior subdupla BD, quia semper quadratum AB, est maius subduplo rectanguli ABC, & quadrati BC. Fiat BE, æqualis AB, quæ secetur

bifa-

bifariam in F; deinde super A D, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B G; & à puncto F, ducatur linea ad punctum G; centro autem F, interuallo F G, describatur semicirculus C G K, qui semper secabit A B, vt patebit inferius. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim rectangulum A B D, & rectangulum



K B C, sunt æqualia inter se, quia æqualia eidem quadrato G B; & quia K E, est æqualis C B, rectangulum K B C, est æquale rectangulo E C B; ergo rectangulum A B D, est æquale rectangulo E C B, nempe rectangulo E B C, & quadrato C B. Sed quoniam E B, est æqualis A B, ergo rectangulum E B C, est æquale rectangulo A B C. Quare, & rectangulum A B D, erit æquale rectangulo A B C, & quadrato B C. Quare quadratum A B, ad hæc habebit eãdem proportionem. Sed quadratum A B, ad rectangulum A B D, est vt A B, ad B D. Ergo, & vt A B, ad B D, sic quadratum A B, ad rectangulum A B C, cum quadrato B C. Quod erat faciendum.

Quod

Quòd verò assumptum est, nempe semicirculum CGK, secare A B; seù F G, minorem esse F A, patet; quia, cùm D B, sit minor dupla B A, ergo, & quadratum G B, erit minus duplo quadrati A B. Ergo quadratum G B, ad quadratum A B, erit in ratione minori, quam 8, ad 4. Et quia B F, cum sit dimidia B A, est eius quadratum subquadruplum quadrati A B. Ergo duo quadrata G B, B F, nempe quadratum G F, erit ad quadratum A B, in ratione minori, quam 9, ad 4. Sed quadratum A F, est ad quadratum A B, vt 9. ad 4. Ergo quadratum F G, est minus quadrato F A; & consequenter F G, erit minor F A.

PROBLEMA XX. PROP. LI.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis E A C, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Pariter data ratio sit, quam habet A D, ad H, quam infra patebit, debere esse maiorem subdupla. Diuidatur, per Lemma antecedens, A D, in F, vt quadratum A D, sit ad rectangulum A D F, cum quadrato D F, vt A D, ad H. Et pariter, vt supra factum est, aptetur à puncto D, D E, æqualis D F, & fiant omnia;

vt in antecedenti Problemate, & arguatur congruenti argumentatione, vt ibidem.



Tandem cócludemus; quadratum A E, ad rectangulũ A E G, cum quadrato E G, esse, vt A D, ad H. Quare patet etiam, superficiem sphæricam portionis E A C, esse ad perimetrum coni E A C, vt A D, ad H.

Quòd verò ratio A D, ad H, debeat esse subdupla. Patet, quia quadratum A E, est maius subduplo rectanguli A E G, cùm quadrato E G.

SCHOLIVM.

EX dictis habemus modum, quo soluamus Problema, in gratiam cuius traditum est præsens; nempe. Datis iisdem, quæ in tribus superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis E A C, intus, & extra, dempto cono E A C, ad perimetrum coni E A C, sit in data proportione. Nam perimeter talis portionis extra, constaret superficie sphærica portionis, & circulo basis; intra verò, superficie conica, supponendo ablato cono, remanere basim. Si ergo fiat, vt excessus A D, super H, ad H, (quia in tali casu proportio data debet esse excessus). sic quadra-

dratum E A, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; erit componendo, vt A D, ad H, sic quadratum A E, cum rectangulo A E G, & cum quadrato E G, ad rectangulum A E G, cum quadrato E G; nempe, totus perimeter portionis, vt suprà expositæ, ad perimetrum coni.

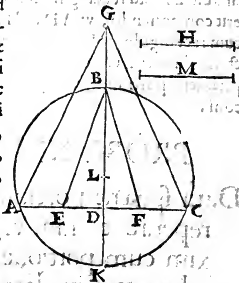
PROBL. XXI. PROP. LII.

Data sphæræ portione quacumque, reperire conum circa eamdem axim cum portione, vt portio sit ad conum in data proportione.

Licet solutio huius Problematis possit haberi facillimè ex Archimede, vt patebit; quia tamen possumus ipsum soluere, quamuis difficiliori modo, per quandam propriam propositionem vniuersalem, quam censemus non spernendam; ideò cùm nesciamus hanc aptiori loco collocare; in gratiam nostræ propositionis, soluimus hoc Problema, primò facilissimè ex Archimede postea præmisso proprio Lemmate vniuersali.

Sit ergo datæ sphæræ, cuius diameter B K, centrum L, data portio A B C, cuius axis B D, & data sit proportio, quam habet K B, ad H, & oporteat facere, quod imperatum est. Fiat, vt K D, ad eandem K D,

cum K L, ſic D B, ad D G. Ergo, ex Archimede 2. de ſphæra, & Cylindro propoſ. 2. ſi fiat conus A G C, hic erit æqualis portioni A B C. Fiat ergo, & fiat, vt G D, ad D B, ſic K B, ad M; & fiat, vt M, ad H, ſic quadratum A D, ad quadratum D E. Facto ergo cono E B F. Dico hunc eſſe quæſitum.



Nam conus A G C, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione G D, ad D B, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E, per propoſitionem primam huius. Sed, vt G D, ad D B, ſic facta eſt K B, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum D E, ſic M, ad H. Ergo conus A G C, ſeu portio A B C, ei æqualis, ad conum E B F, habet rationem compoſitam ex ratione K B, ad M, & M, ad H. Sed iſtæ duæ rationes K B, ad M, & M, ad H, faciunt rationem K B, ad H. Ergo, &c. Quod &c.

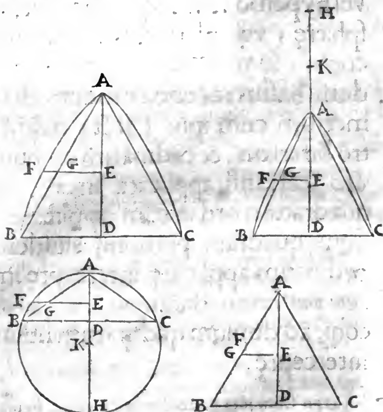
LEM-

LEMMA XXXII. PROP. LIII.

Quodlibet Conoides parabolicum, vel hyperbolicum; quælibet portio ſphærę, vel ſphæroidis, & etiam conus, ſunt ad conum ſuper eandem baſim, & circa eandem diametrum cum ipſis (ſecta diametro bifariam, & ordinatim ex puncto ſectionis applicata linea,) vt quadratum ordinatim applicatę, cum quadrato portionis eiuſdem ordinatim applicatę interceptę inter punctum diuiſionis, & latus coni, ad duplum quadratum huius interceptę.

SIT ergo Conoides parabolicum in prima figura, vel hyperbolicum, vt in ſecunda, vel quælibet portio ſphæræ, vel ſphæroidis, vt in tertia, vel conus, vt in quarta A B C, cuius diametrum A D; & circa diametrum A D, & ſuper eandem baſim B C, ſit, in vnaquaque figura, conus B A C, & diameter D A, ſit diuiſa,

uisa bifariam in E, & per E, sit ducta E F, parallela B D, secans A B, latus coni in G. Dico solidum B A C, esse ad conum B A C, vt duo quadrata F E, E G, ad duo quadrata G, E.



In cono res est euidens, quia est proportio æqualitatis. In portione sphæræ, vel sphæroidis, sit diameter totius sphæræ, vel sphæroidis A H. In conoide hyperbolico, A H, sit diameter transuersa, & in omnibus istis sit centrum K.

Tunc

Tunc in Conoide parabolico. Quoniã ex prim. conic. prop. 20. quadratum B D, eſt duplum quadrati F E, cum ſit ad ipſum, vt D A, ad A E, & eſt quadruplum quadrati G E; ergo quadratum F E, erit duplum quadrati G E; & duo quadrata F E, E G, erunt ſexquialtera duorum quadratorum G E; nempe, vt Conoides B A C, eſt coni B A C, ex Archimede lib. de Conoid. & Sphæroid. prop. 23.

In Conoide verò hyperbolico, & in portione ſphæræ, vel ſphæroidis. Quoniam quadratum F E, eſt ad quadratum B D, ex primo conic. prop 21. vt rectangulum H E A, ad rectangulum H D A; & vt quadratum B D, ad quadratum G E, ſic rectangulum H D A, ad rectangulum ſub H D, in dimidiam ipſius A E, nempe ad rectangulum ſub dimidia H D, in A E. Ergo ex æquali, vt quadratum F E, ad quadratum G E, ſic rectangulum H E A, ad rectangulum ſub dimidia H D, in E A, nempe (propter eandem altitudinem A E,) vt H E, ad dimidiam H D, quæ eſt K E, vt conſideranti patet. Ergo, & componendo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad quadratum E G. ſic H E, cum E K, ad E K. Et ad conſequentium dupla. Ergo, vt quadratum F E, cum quadrato E G, ad duo quadrata E G, ſic H E, cum K E, ad H D. Sed E H, cum K E, facit dimidiam A H, cum H D, vt conſideranti patet; & ex Archimede de Conoid. & ſphæroid. prop. 31. & 33 Portio B A C, vel conoides hyperbolicum, eſt ad conum B A C, vt dimidia H A, cum H D, ad H D. Ergo portio, vel conoides, eſt ad conum, vt duo quadrata E G. Quod &c.

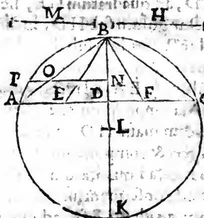
In

In Conoide enim hyperbolico, patet, quod dimidia H A, cum H D, facit ſexquialteram H A, cum A D.

PROBL. XXII. PROP. LIV.

Idem.

Diuidatur B D, bifariam in N, & ducatur per punctum N, N O P, parallela A D, ſecans B A, latus coni in O; & fiat, vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, ſic K B, ad M; deinde fiat, vt M, ad H, ſic quadratum A D, ad quadratum D E, vbicunque cadat punctum E; & fiat conus E B F. Dico portionem A B C, eſſe ad conum E B F, vt K B, ad H.



Quoniam enim ratio portionis A B C, ad conū E B F, de foris ſumpto cono A B C, componitur ex ratione portionis ad conum A B C, & coni A B C, ad conum E B F; & vt portio ad conum A B C, ſic, per propoſitionem antecedentem, duo quadrata P N, & N O, ad duo quadrata N O; & vt conus A B C, ad conum E B F, ſic quadratum A D, ad quadratum D E. Ergo

Ergo proportio portionis A B C, ad conum E B F, componetur quoque ex proportione quadratorũ P N, N O, ad duo quadrata N O, & ex proportione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed proportio quadratorum P N, N O, ad duo quadrata N O, eſt eadem cum proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, quia, vt dimidium, ad dimidium, ſic duplum ad duplum. Ergo proportio portionis ad conum E B F, componetur quoque, ex proportione duorum quadratorum P N, cum duobus quadratis N O, ad quatuor quadrata N O, ſeù ad quadratum A D, eis æquale, & ex ratione quadrati A D, ad quadratum D E. Sed vt duo quadrata P N, cum duobus quadratis N O, ad quadratum A D, ſic facta eſt B K, ad M; & vt quadratum A D, ad quadratum E D, ſic M, ad H. Ergo proportio portionis A B C, ad conum E D F, cõponetur ex proportionibus K B, ad M, & M, ad H. Sed ex ijſdem proportionibus componitur ratio K B, ad H. Ergo, vt K B, ad H. Sic portio A B C, ad conum E B F. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

CVM hæc huius Libelli imprimerentur, occaſione, qua Propoſit. 53. vſi ſumus Archimede libro de Conoid. & Sphæroid. prop. 23. in qua demonſtrat. Conoides parabolicum ad conum in eadem baſi, & circa eandem diametrum cum ipſo, eſſe in proportione ſexquialtera, incidimus in modum hoc idem demonſtrãdi,

P ſed

Sed per auream methodum indiuisibilium, quam qui aspernantur, aliam non merentur pœnam, quàm priuari fructu ex tali methodo colligendo. Visum est ergo peroptimum, huncmodum hoc loco explicare, qui vtique est diuersus ab his, quibus vtuntur columnæ herculeæ Geometrarum Italorum nostri sæculi, nimirum Bonauentura Caualerius lib. 4. Geometriæ indiuisibilium, prop. 21. & Euangelista Torricellius in exemplis pro indiuisibilibus curuis, exemplo 14. Ne ergo nostrum ordinem incæptum variemus, trademus hunc modum per duas sequentes propositiones extra ordinem sumptas.

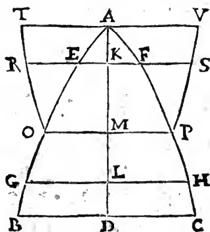
PROPOSITIO PRIMA.

Vide de inf. Parab. lib. 3. prop. 21. pag. 62. & signanter Scholium

Esto parabola B A C, cuius diameter D A, basis B D C, & in diametro D A, sint sumpta duo puncta K, & L, æque remota à punctis A, & D, per quæ sint ductæ ordinatim applicatæ E K, G L. Dico duo quadrata E K, G L, esse æqualia quadrato BD.

QVoniam enim quadratum EK, est ad quadratum BD, vt K A, ad A D; & pariter quadratum

tum G L, est ad quadratum B D, vt L A, ad A D, ex 20. prim. Conic. Ergo, & duo quadrata E K, G L,



erunt ad quadratum B D, vt K A, seu L D, simul cum A L, nempe, vt tota A D, ad A D. Quare æqualia.

SCHOLIVM.

FAcilè elicitur ex dictis, quod si A D, diuisa bifariam in M, & per M, ordinatim applicata O M P, mente concipiamus, frustrum B O P C, parabolæ, rotari super O P, veluti super cardinem, donec collocetur super O A P, adeò vt B D C, sit in T A V, & D M, congruat A M, & punctum D, congruat ipsi A; puncta verò B, C, congruant ipsis punctis T, V; infertur inquam, quod si in A M, sumatur quodlibet

 pun-

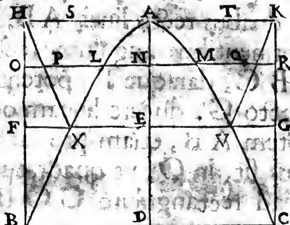
punctum K, per quod ordinatim applicetur R E K F S; semper duo quadrata R K, K E, erunt æqualia quadrato N M. Res est euidens.

PROPOSITIO SECVNDA.

Sit parabola A B C, & ei sit circumscriptum parallelogrammum H B C K, & omnia voluantur circa diametrum A D. Dico Cylindrum ortum ex tali reuolutione, esse conoidis parabolici duplum.

SEcetur A D, bifariam in E, & per punctum E, agatur planum F X E V G, parallelum planis H K, B C, & mente concipiamus frustum parabolicum B X V C, locari, adeò vt basis B D C, sit in H A K, punctum D, sit in puncto A, & linea D E, sit super E A, & sumatur in A E, quodlibet punctum N, per quod agatur planum O P L N M Q R, faciens in Cylindro circulum, cuius radius O N, in portione conoidis X A V, circulum, cuius radius L N, & in frusto X H K V, circulum, cuius radius P N. Quoniam enim quadratum H A, seù O N, est æquale quadratis P N, & N L, ex Scholio Propositionis antecedentis. Ergo, & circulus, cuius radius O N, erit æqualis circulis, quorum radij

radij P N, N L; & punctum L, sumptum est vtcumque. Ergo omnes circuli Cylindri H F G K, sumpti iuxta



regulam planũ H A K, seù F E G, erunt æquales omnibus circulis frusti HXVK, & portionis X A V, sũptis iuxta eandem regulam. Quare & Cylinder H F G K, erit æqualis frusto HXVK, seù B X V C, & portioni X A V, nempe erit æqualis toti conoidi B A C. Sed Cylinder H B C K, est duplus Cylindri H F G K. Ergo talis Cylinder est duplus conoidis B A C. Quod erat ostendendum.

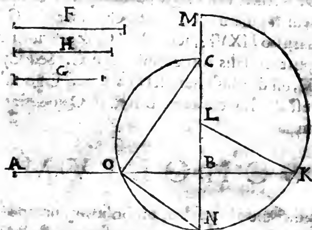
SCHOLIVM.

EX dictis claré infertur propositum, nempe Conoides esse sesquialterum coni super base B D C, & circa diametrum A D. Ratio est, quia conus est subtriplus Cylindri, vnde, quorum Cylindrus est sex, & conoides tria, conus erit duo.

LEM-

LEMMA XXXIII. PROP. LV.

Datis duabus rectis lineis A B, B C, continentibus angulum rectum, A B C, dataque F, potentia, à puncto C, ducere lineam occurrentem A B, etiam protractæ, si opus sit, in O, vt quadratum F, sit ad rectangulum C O B, in data proportione.



SIT hæc, quàm habet F, ad G; & inter F, & G, sit media proportionalis H; & fiat, vt BC, ad H, sic H, ad BK, positam in directum ipsi A B; sectaque BC,

BC, bifariam in L, & ducta LK; centro L, interuallo LK, fiat semicirculus, cuius diameter sit MN; & super CN, ex parte opposita, fiat semicirculus NOC, secans AB, in O. Dico punctum O, esse quæsitum, nempe ducta CO, esse quadratum F, ad rectangulum COB, vt F, ad G. Ducatur ON. Quoniam LC, est æqualis LB, & ML, ipsi LN; ergo & MC, est æqualis BN. Ergo quadratum BK, est æquale rectangulo CNB, nempe quadrato NO. Ergo, & linea BK, est æqualis NO. Cùm autem (propter similitudinem triangulorum COB, NOB) rectangulum COB, sit æquale rectangulo sub CB, in ON, seu in BK; & rectangulum CBK, sit æquale quadrato H. Ergo & rectangulum COB, erit æquale quadrato H. Sed quadratum F, ad quadratum H, est, vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum COB. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Lemma antecedens reducitur ad Problema Vieteum. Data base trianguli rectanguli, & media proportionali inter hypotenusam, & perpendiculum, inuenire triangulum.

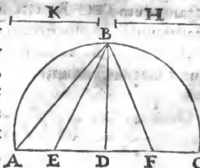


PRO-

PROBL. XXIII. PROP. LVI.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies portionis, sit ad superficiem coni, in data proportione.

Data proportio sit, quàm habet D B, ad H, & ducta B A, oporteat facere, quòd imperatum est. Datis ergo duabus AD, D B, continentibus angulum rectum A D B, ducatur à puncto B, per propositionem antecedentem, B E, vt quadratum datæ B A, sit ad rectangulum B E D, vt B D, ad H; & fiat ex triangulo B E D, conus E B F. Quem dico esse quæsitum. Demonstratio ex Archimede est facillima, quapropter ad alia transeamus.



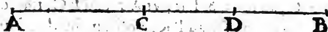


LEM-

LEMMA XXXIV. PROP. LVII.

Datam rectam A B, sectam vtcumque in C, rursùm diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A D C, sit ad quadratum D B, in data proportione.

HOC Lemma triplicem habet casum, secundùm quod proportio data est, vel æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis, soluetur sic.

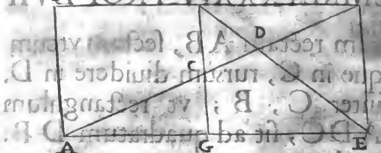


Diuidatur B C, in D, vt sit, sicut A B, ad B C, sic B D, ad D C. Nam cùm sit, vt A B, ad B C, sic B D, ad D C; ergo permutando, erit, vt A B, ad B D, sic B C, ad C D. Ergo, & diuidendo, erit, vt A D, ad D B, sic D B, ad D C. Quare rectangulum A D C, erit æquale quadrato D B.

VEL sic. Fiat A B, diameter cuiuscumque parallelogrammi F E, & per punctum C, agatur H C G, paralella F A, vel B E, & iungatur H E, secans B A, in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim triangulum A D E, est simile trian-

Q gulo

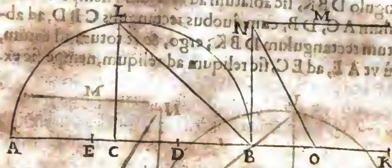


gulo HDB, & pariter triangulum EDB, est simile triangulo HDC. Ergo, vt AD, ad DB, sic ED, ad DH. Vt autem ED, ad DH, sic BD, ad DC; ergo & vt AD, ad DB, sic DB, ad DC. Quare rectangulum ADC, erit æquale quadrato DB.

SI autem proportio data sit excessus, sit ea, quam habet AC, ad CE, & fiat, vt AE, ad EC, ita composita ex AB, & CB, ad BK, positam in directum ipsi AB; deinde facto semicirculo super AB, & à puncto C, erecta perpendiculari CL, & iuncta LB, fiat, vt AE, ad EC, sic LB, ad M, & inter LB, & M, inueniatur media proportionalis, cui sit æqualis BN, erecta perpendiculariter super AB, à puncto B; sectaque BK, bifariam in O, & iuncta ON, fiat OD, ipsi ON, æqualis (infra enim patebit, punctum D, cadere inter C, B.) Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim duo quadrata NB, BO, sunt æqualia quadrato NO, nempe quadrato OD (quia OD, facta est æqualis NO;) & quadratum DO, est æquale duobus quadratis DB, BO, & duobus rectangulis DBO,

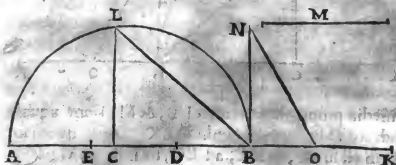
D B O, nempe vnico rectangulo D B K; (quia K B, dupla est B O;) Ergo duo quadrata N B, B O, erunt æqualia duobus quadratis D B, B O, & rectangulo D B K; Et communi ablato quadrato B O, quadratum N B, nempe rectangulum sub L B, & M, (quia N B,



est media proportionalis inter L B, & M;) erit æquale quadrato D B, & rectangulo D B K. Ergo, quoniam factum est suprà, vt A E, ad E C, sic L B, ad M; & est, vt L B, ad M, sic quadratum L B, ad rectangulum sub L B, in M; & quadrato L B, est æquale rectangulum A B C, & pariter rectangulo sub L B, & M, probatum est æquale quadratũ D B, cum rectangulo D B K; ergo erit etiam, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K. Sed quoniam supra factum est, vt A E, ad E C, sic composita ex A B, B C, ad B K; & vt composita ex A B, B C, ad B K; sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum sub tali composita in D B, ad rectangulum D B K; & rectangulum sub composita ex A B, B C, in B D, diuiditur in duplum rectangulum C B D; & in rectangu-

 lum

lum sub A C, in D B. Ergo, & vt rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B K. Cùm ergo sit, vt totum rectangulum A B C, ad totum, nempe ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, sic ablatum ad ablatum, nempe rectangulum A C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad ablatum rectangulum D B K; ergo, & vt totum ad totum, seù vt A E, ad E C, sic reliquum ad reliquum, nempe sic ex-

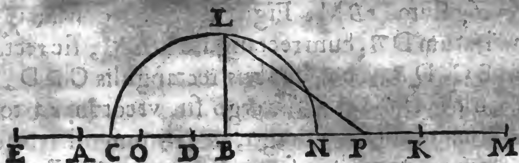


cessus rectanguli A B C, super rectangulum A C, D B, & super duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt A C, ad C E, sic talis excessus, cum quadrato D B, ad quadratum D B. Sed talis excessus, cum quadrato D B, facit rectangulum A D C. Nam, duo quadrata C B, B D, excedunt duo rectangula C B D, quadrato C D; & rectangulum A C B, excedit rectangulum A C, D B, rectangulo A C D, quod cum quadrato C D, facit rectangulum A D C. Ergo, & vt A C, ad C E, sic rectangulum A D C, ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd

Quòd verò assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet ex processu demonstrationis. Quia non in C. Nam, cùm probatum sit, vt A E, ad E C, sic rectangulum A B C, ad quadratum D B, cum rectangulo D B K, nempe ad rectangulum K D B, nempe, ex suppositione, ad rectangulum K C B; & cùm sit, vt rectangulum A B C, ad rectangulum K G B, sic A B, ad K C; erit vt A E, ad E C, sic A B, ad C K. Sed pariter factū est, vt A E, ad E C, sic A B, cum B C, ad B K. Ergo esset etiam, vt A B, ad C K, sic A B, cum B C, ad B K, minorem C K. Quod est absurdum. Et multò maius absurdum concluderetur si punctum D, caderet vltra C. Ergo cadit inter C, B.

SI Verò proportio data sit defectus, sit ea, quam habet A C, ad C E; & fiat, vt E A, ad A C, sic, & dupla C B, ad B K, & E C, ad K M, positas in directum, tùm inter se, tùm ipsi A B, & diuisa B K, bifariam in N, super C N, fiat semicirculus, & à puncto B, erigatur perpendicularis B L. Pariter secetur B M, bifariam in P, & iuncta L P, fiat ei æqualis P D, (ostendetur inferius punctum D, cadere inter C, B,) & ipsi D B, fiat æqualis C O. Dico punctum O, esse quæsitum.



Eodem

Eodem enim modo, quo factum est suprà, ostendetur, quadratum L B, esse æquale quadrato D B, cum rectangulo D B M, ac proinde etiam rectangulũ C B N, esse æquale quadrato D B, cum rectangulo D B M. Sed quoniam factum est, vt E A, ad A C, sic dupla C B, ad B K, seu C B, ad B N; & vt C B, ad B N, sic quadratum C B, ad rectangulum C B N, seu ad ei æquale quadratum D B, cum rectangulo D B M. Ergo, & vt E A, ad A C, sic quadratum C B, ad quadratum D B, cum rectangulo D B M. Rursum, quoniam supra factum est, vt E A, ad A C, sic tam E C, ad K M, quàm dupla C B, ad B K; ergo erit, vt E A, ad A C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia; nempe E C, cum dupla C B, ad totam B M. Sed vt E C, cum dupla B C, ad B M, sic (sumpta communi altitudine D B,) rectangulum sub E C, in D B, cum duplo rectangulo C B D, ad rectangulum D B M. Ergo, & vt quadratum C B, ad quadratum D B, cum rectangulo D B M, sic rectangulum E C, D B, cum duobus rectangulis C B D, ad rectangulum D B M. Cùm ergo sit, vt totum ad totũ, sic ablatum ad ablatum; ergo, & reliquum ad reliquum erit, vt totum ad totum, seu vt E A, ad A C. Ergo, & vt E A, ad A C, sic excessus quadrati C B, super rectangulum E C, D B, & super duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Ergo, & componendo, vt E C, ad C A, sic excessus duorum quadratorum C B, B D, super rectangulum E C, D B, & super duo rectangula C B D, ad quadratum D B. Et conuertendo, vt quadratum D B, seu, vt quadratum C O, (quia C O, facta est æqualis

D B,

DB, ad excessum quadratorum CB, BD, vel CO, super rectangulum EC, DB, seù ECO, & super duo rectangula CBD, seù BCO, sic AC, ad CE. Sed, & vt AC, ad CE, sic rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Ergo, & vt AC, ad CE, tàm est quadratum CO, ad excessum duorum quadratorum CB, CO, super rectangulum ECO, & super duo rectangula BCO, quàm rectangulum ACO, ad rectangulum ECO. Quare, & vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, seù, vt AC, ad CE, sic ambo ante-

cedentia ad ambo consequentia, nempe sic quadratum CO, cum rectangulo ACO, nempe rectangulũ AOC, ad excessum duorum quadratorum BC, CO, solum, super duo rectangula BCO, nempe ad quadratum OB. Quod erat faciendum.

Quòd autem assumptum est, nempe punctum D, cadere inter C, B, patet. Quia non in C; nam cùm probatum sit, esse, vt EA, ad AC, sic quadratum CB, ad rectangulum MDB, nempe in tali casu, ad rectangulum MCB; & cùm sit, vt quadratum CB, ad rectangulum MCB, ita CB, ad CM; esset, & vt EA, ad AC, sic CB, ad CM. Quòd est absurdũ, quia supra factum

factum est, vt E A, ad A C, sic C B, ad solam B N. Et maius absurdum concluderetur, si punctum D, caderet vltra C. Ergo patet propositum.

SED præsens Lemma potest vnica demonstratione comprehendente omnes casus facilius solui, sed per locum solidum, quàm non erit inutile hic subingere.

Sit ergo data A B, diuisa in C, vt supra, & data ratio sit, quam habet A C, ad H. Producatur A B, in E, vt C B, B E, sint æquales; & facta A E, diametro semicirculi, erigatur à puncto B, perpendicularis B F; & circa axim C B, diametro transuersa A C; per prop. 53. primi conicorum, describatur hyperbola transiens per punctum F, cuius vertex sit C; deinde fiat, vt H, ad A C, sic C B, ad C K, vbicumque cadat punctum K, & super K B, fiat semicirculus ad eandem partem cum priori, ac à puncto C, erecta perpendiculari C G, ducatur G B, secans hyperbolam in puncto O; demissa ergo

ergo à puncto O, perpendiculari O D, super A B, secante ipsam in D. Dico punctum D, esse quæsitum.

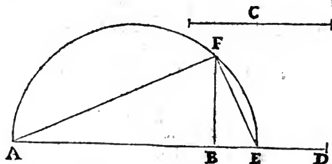
Etenim, propter similitudinem triangulorum G B C, O D B, est, vt G C, ad C B, sic O D, ad D B; & pariter est, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic quadratum O D, ad quadratum D B. Sed, vt quadratum G C, ad quadratum C B, sic K C, ad C B, nempe A C, ad H, (factum est enim supra, vt H, ad A C, sic B C, ad C K; quare conuertendo, erit, vt K C, ad C B, sic A C, ad H.) Ergo, vt A C, ad H, sic quadratum O D, nempe rectangulum A D C, (quod ei ostendetur æquale) ad quadratum D B. Quod erat faciendum.

Quòd verò rectangulum A D C, sit æquale quadrato D O, sic patebit. Nam, quia B C, est æqualis B E, rectangulum A B C, erit æquale rectangulo A B E, nempe quadrato B F. Sed, ex propositione 21. primi conicorum, est vt rectangulum A B C, ad quadratum B F, sic rectangulum A D C, ad quadratum D O. Quare patet propositum.

LEM. XXXV. PROP. LVIII.

Data base trianguli rectanguli, & data media proportionali inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inuenire triangulum.

DAta basis sit A B, & data media proportionalis sit C, & oporteat inuenire triangulum. Fiat, vt A B, ad C, sic C, ad B D, positam in directum ipsi A B; deinde data A D, secta in B, rursùm secetur in E, vt re-



ctangulum A E B, sit æquale quadrato D E, per propositionem antecedentem, & super A E, fiat semicirculus, ac à puncto B, erigatur perpendicularis B F, & ducantur A F, F E. Dico triangulum A F B, esse quæsitum.

Quo-

Quoniam enim rectangulum A E B, eſt æquale tàm quadrato E D, quàm quadrato E F; ergo, & duo quadrata E D, E F, pariter duæ lineæ E D, E F, erunt æquales. Tunc; quoniam rectangulũ A B D, eſt æquale quadrato C, per conſtructionem, & pariter eſt æquale rectangulis A B E, & A B, E D; ergo, & quadratum C, erit æquale rectangulo A B E, nempe (quadrato B F,) & A B, E D, nempe A B, F E, quia duæ D E, F E, oſtenſæ ſunt æquales. Sed, propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum A B F, B F E, rectangulo A B, F E, eſt æquale rectangulum A F B. Ergo quadratum C, erit æquale quadrato F B, & rectangulo A F B, nempe rectangulo ſub compoſita, ex hypotenuſa A F, & perpendiculo F B, & ſub perpendiculo F B. Quare patet propoſitum.

LEM·XXXVI·PROP·LIX.

Datis iiſdem, quæ in propoſitione 55. facere eadem, quæ ibidem, vt quadratum F, ſit ad rectangulum C O B, cum quadrato O B, in data proportione.

SIT data proportio, quàm habet F, ad G, & inter F, G, inueniatur media H. Data autem B C, baſe trianguli rectanguli, & data H, media proportionali

 inter

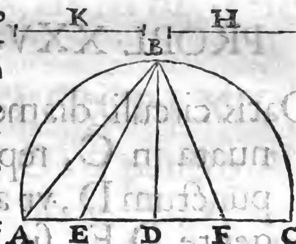
inter compositam, ex hypotenusa, & perpendiculo, & ipsum perpendiculum, inueniatur triangulum C O Z. Dico factum esse, quod proponebatur.

Quoniam enim rectangulum sub composita ex C O, & O Z, & sub O Z, est æquale quadrato H; ergo quadratum F, ad hæc, habebit eandem proportionem. Sed quadratum F, ad quadratum H, est vt F, ad G. Ergo, & vt F, ad G, sic quadratum F, ad rectangulum sub composita ex C O, O Z, in O B, nempe ad rectangulum C O B, cum quadrato O B. Quod erat faciendum.

PROBL. XXIV. PROP. LX.

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis ſit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

EXponatur linea K, potens ſimul duo quadrata BA, AD; & data ratio ſit, quàm habet AD, ad H. Datis autem duabus AD, DB, continentibus angulum rectum ADB, ducatur à puncto B, linea BE, vt ſit, vt AD, ad H, ſic quadratum K, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, per antecedentem propoſitionem, & fiat conus EBF. Quem dico eſſe quæſitum.



Quia, vt AD, ad H, ſic quadratum K, nempe duo quadrata BA, AD, ad rectangulum BED, cum quadrato ED, nempe, ex Archimede, totus perimeter portionis ABC, ad totum perimetrum coni EBF. Quod erat faciendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVamuis Propositione 57. propositum sit Lemma sic vniuersaliter, attamen, vt patuit Propositione 58. non indigebamus ipso ad solutionem antecedentis Problematis, sic vniuersaliter proposito, sed tantùm in proportione æqualitatis. Verùm ad vberiorem scientiam, & quia ex ipso dependent alia Problemata, quamuis non pertinentia, nec ad conos, neque ad sphæras, nec ad superficies conicas, nec ad superficies sphæricas; proposuimus ipsum vniuersaliter. Vt ergo capiamus fructum ex ipso manantem, soluemus duo sequentia Problemata.

PROBL. XXV. PROP. LXI.

Datis circuli diametro A B, continuata in C, reperire inter B, C, punctum D, vt ab ipso ducta tangente D E, sit hæc ad D C, in data proportione.

DAta ratio sit, quàm habet A B, ad H, quæ continuetur ad tertium terminum K; deinde, per Propositionem 57. data A C, secta in B, taliter secetur in D, inter C, B, vt rectangulum A D B, sit ad quadra-

tum D C; vt A B, ad K; & à puncto D, ducatur tangens D E. Dico factum esse, quod proponebatur.

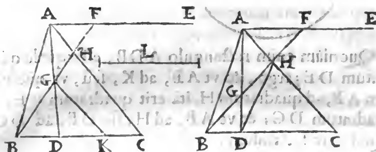
Quoniam enim rectangulo A D B, est æquale quadratum D E; ergo, & vt A B, ad K, seù, vt quadratum A B, ad quadratum H, ita erit quadratum D E, ad quadratum D C; & vt A B, ad H, sic D E, ad D C. Quod erat faciendum.

PROBL. XXVI. PROP. LXII.

In triangulo B A C, à puncto A, sint ductæ duæ lineæ, A D, occurrens B C, inter B, C, & A E, parallela B C, indefinita; à puncto B, ducere B G H F, tali lege, vt quadratum B G, ad rectangulum F G H, sit in data proportione.

Data

Data recta; BC, secta in D; rursùm secetur in K, inter D, C, per propositionem 57, vt rectangulum BKD, sit ad quadratum KC, in data proportione, quæ sit ea, quam habet v. g., BC, ad L, & per punctum K, ducatur KG, parallela CA, occurrens AD, in G, & per puncta B, G, ducatur linea BGHF, secans AC, in H, & occurrens AE, in F. Dico lineam BF, esse quæsitam.



Quoniam enim rectangulum BKD, ad quadratum KC, habet rationem compositam ex rationibus BK, ad KC, & DK, ad KC; ergo, & ratio BC, ad L, componetur ex istis proportionibus. Sed vt BK, ad KC, sic (ob parallelas GK, AC,) BG, ad GH; & pariter, vt DK, KC, sic DG, ad GA, & (ob parallelas AF, BD,) vt DG, ad GA, sic BG, ad GF: Ergo, & BC, proportio ad L, componetur ex duplici proportione, nempe BG, ad GH, & BG, ad GF, quæ duæ faciunt rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Quare patet propositum.

Quamuis verò hoc Problema sit sic vniuersale, attamen

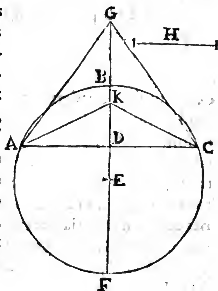
men non erit inutile tradere aliam propositionem in proportione æqualitatis, quæ non supponet propositionem 57.

Datis ergo, quæ supra, ducatur D H, parallela A B, & per B,& H, ducatur BGHF. Quàm dico esse quæsitam. Nam (ob parallelas HD, BA,) duo triangula AH*B*, ADB, sunt æqualia; & dempto communi triãgulo AGB, triangulum AGH, erit æquale triangulo BGD. Nunc; quoniam triangulum BGD, ad triangulum AGH, habet rationem compositam, ex ratione trianguli BGD, ad triangulum GAF, & trianguli GAF, ad triangulum GAH; vt autem triangulum BGD, ad triangulum GAF, sic (quia ista triangula sunt similia ob parallelas BD, AF,) quadratum GB, ad quadratum GF; & vt triangulum GAF, ad triangulum GAH, sic FG, ad GH. Ergo triangulum BGD, ad triangulum AGH, habet rationem compositam ex rationibus quadrati *B*G, ad quadratũ GF, nempe ex duplici ratione *B* G, ad GF, & GF, ad GH. Sed rationes B G, ad G F, & G F, ad G H, faciunt rationem BG, ad HG. Ergo triangulum BGD, ad triangulum A GH, habet rationem compositam, ex rationibus BG, ad GF, & BG, ad GH. Sed istæ duæ rationes componunt etiam rationem quadrati BG, ad rectangulum FGH. Ergò vt triangulum BGD, ad triangulum AGH, sic quadratum BG, ad rectangulum FGH. Sed triangulum *B*GD, probatum est æquale triangulo FGH. Quare &c. Quod &c.

PROBL. XXVII. PROP. LXIII.

Data ſphæræ portione, conſtituere conum ſuper eamdem baſim portionis, vt portio ſit ad conum in data proportione.

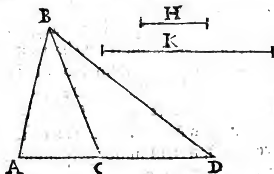
SIT data portio A B C, ſphæræ, cuius diameter F B, centrum E, & data proportio ſit, quam habet F D, ad H. Oportet facere &c. Fiat, vt F D, ad F D, cum F E, ſic D B, ad D G, & fiat conus A G C, cuius axis ſit G D. Ergo conus A G C, ex Archimede ſupra citato, eſt æqualis portioni A B C. Fiat ergo, vt F B, ad H, ſic G D, ad D K, vbicumque cadat K, & fiat conus A K C. Quem dico eſſe quæſitum. Nam conus G A C, ſeù portio A B C, eſt ad conũ A K C, vt G D, ad D K; ſeù vt F B, ad H. Quod erat faciendum.



LEM. XXXVII. PROP. LXIV.

Dato quolibet triangulo ABC, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineam BD, occurrentem lateri AC, etiam producto, vt quadratum vnius lateris, putà BC, sit ad rectangulum sub alio latere in ductam, nempe ad rectangulum ABD, in data proportione possibili.

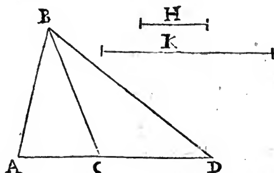
PRoportio possibilis est, quod si proportio sit excessus sit, non maior ea, quàm habet quadratum



BC, ad rectangulum sub BA, in perpendiculum, quia aliter BD, non esset ducibilis, cùm esset minor perpen-

 dicu-

diculo. Data ratio sit, quam habet AC, ad H, & fiat vt AB, ad BC, sic BC, ad K; & fiat vt AC, ad H, sic K, ad aliam, quæ non erit minor perpendiculo trianguli, vt patebit ex determinatione Lemmatis, ac proinde si ducatur à puncto B, occurret AC; occurrat in puncto D. Dico quadratum BC, esse ad rectan-



gulum ABD, in data proportione AC, ad H. Nam, quoniam factum est, vt AB, ad BC, sic BC, ad K; ergo quadratum BC, erit æquale rectangulo sub AB, & K. Ergo hęc ad rectangulũ ABD, habebunt eandem proportionem. Sed rectangulum sub AB, in K, ad rectangulum ABD, est, vt K, ad BD; & vt K, ad BD, sic AC, ad H. Ergo, & vt AC, ad H, sic quadratum BC, ad rectangulum ABD. Quod erat faciendum.

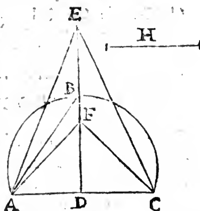
Quòd verò BD, non sit minor perpendiculo, patet, vt dixi, ex determinatione.

PRO-

PROBL. XXVIII. PROP. LXV.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica portionis, sit ad superficiem conicam coni, in data proportione.

Data portio sit ABC, & data ratio sit, quam habet AD, ad H. Oportet facere, quod imperatum est. Ducatur BA. Infra patebit oportere proportionem datam minorem esse ea, quam habet quadratum AB, ad quadratum AD. A vertice ergo A, dati trianguli ADB, ducatur AE, occurrens DB, in E, vt quadratum AB, sit ad rectangulum EAD, vt AD, ad H; & ex triangulo EAD, reuoluto circa ED, fiat conus AEC. Dico conum AEC, esse quæsitum. Patet faciliter; nam superficies portionis ABC, ad superficiem coni EAC, est, ex Archimede sæpè citato, vt quadratum BA, ad rectangulum EAD, nempe vt AD, ad H. Quod erat faciendum.



Quòd

Quòd verò proportio data debeat esse minor ea, quàm habet quadratum B A, ad quadratum A D, patet; quia aliter cùm non possit duci A E, conus E A C, non esset construibilis.

LEM·XXXIIX· PROP·LXVI·

Sit portio A B C, cuius vertex B, axis B D, diameter basis A C, & ducatur A B, fiatque vt D A, ad A B, ita A B, ad aliam, quæ erit ipsa A B, maior, & sit A E, occurrens D B, productæ in E. Dico, quod si ex triangulo E A D, fiat conus E A C, superficies conica talis coni erit æqualis superficiei sphericæ portionis A B C.

INspiciatur schema antecedentis Propositionis. Patet propositum, quia rectangulum E A D, est æquale quadrato A B. Ergo, ex Archimede, & superficies portionis, erit æqualis superficiei coni.

COROLLARIVM.

EX dictis deducitur, totum perimetrum portionis, esse æquale toti perimetro coni, addita nempe basi communi.

SCHO-

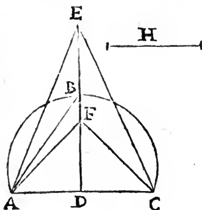
SCHOLIVM.

HIC etiam non erit inutile notasse, quòd si portio sit hemisphærium, latus coni erit æquale diametro sphæræ, quia tunc A B, est media proportionalis inter A D, semidiametrum sphæræ, & diametrum. Notetur etiam, si placet, totum perimetrum coni esse triplum circuli maximi sphæræ; ac proinde se habere ad circulum maximum, seù ad suam basim, vt Cylindrus in eadem basi, & altitudine, ad conum.

PROBL. XXIX. PROP. LXVII.

Idem.

DAta proportio sit A D, ad H; & fiat conus A E C, cuius superficies sit æqualis superficiei sphæricæ portionis. Patet ergo faciliter, quod si Problema debet solui, oportet rationem A D, ad H, esse minorem ea, quam habet rectangulum E A D, ad quadratum A D. Fiat ergo, vt A D, ad H, sic E A, ad aliam, quæ ex determinatione erit maior A D, ac proinde, si ducatur à puncto A, occurret D E, occurrat in F, & fiat conus AFC.



AFC. Quem aio esse quæsitum. Demonstratio est facilissima; quia vt A D, ad H, sic E A, ad A F, nempe, (sumpta communi altitudine A D,) rectangulũ E A D, ad rectangulum F A D. Nempe quadratum B A, æquale rectangulo E A D, ad rectangulum F A D. Nempe, superficies portionis A B C, ad superficiem coni A F C. Quod erat faciendum.

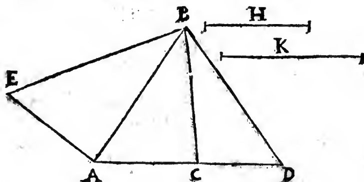
LEM. XXXIX. PROP. LXVIII.

Dato triangulo A B C, cuius vertex B, ducere à vertice B, lineã B D, occurrentem A C, productæ (si opus sit) tali lege, vt duo quadrata C B, B A, sint ad rectangulum D B A, cum quadrato B A, in data ratione possibili.

Etiam hic oportet proportionem datam non esse maiorem ea, quam habent duo quadrata C B, B A, ad quadratum B A, simul cum rectangulo sub B A, in perpendiculum; aliter B D, non posset duci, quia esset minor perpendiculo, vt consideranti patet.

Data ergo ratio sit, quam habet A C, ad H, & erigatur à puncto A, ipsi A B, perpendicularis A E, æqualis ipsi B C; & ducatur B E. Tunc fiat, vt A B, ad B E, sic

sic B E, ad K; deinde fiat vt A C, ad H, sic K, ad aliam, quæ ex determinatione Problematis, non erit minor composita ex A B, & perpendiculo, vt patebit ex processu demonstrationis. Quare si ab ipsa auferatur æqualis A B, & reliqua ducatur à vertice B, vtique occurret A C. Occurrat ergo, & sit B D.



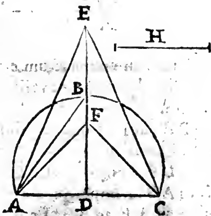
Quoniam enim factum est, vt A C, ad H, sic K, ad D B simul cum B A, & vt K, ad D B, cum B A, sic (sumpta communi altitudine B A,) rectangulum sub K, & sub B A, ad rectangulum sub composita ex D B, & B A, in A B, nempe ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Ergo, & vt A C, ad H, sic rectangulum sub K, in A B, nempe quadratum B E, (nam factum est supra, vt A B, ad B E, sic B E, ad K,) ad rectangulum D B A, cum quadrato B A. Sed quadrato B E, sunt æqualia duo quadrata B A, A E; & quadrato A E, est æquale quadratum B C, ex constructione. Ergo, & vt A C, ad H, sic quadrata A B, B C, ad rectangulum D B A, cum quadrato A B. Quod erat faciendum.

T PRO-

PROBL. XXX. PROP. LXIX.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate; facere eadem, quæ ibidem, vt totus perimeter portionis, sit ad totum perimetrum coni, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet A D, ad H, quam patebit oportere minorem esse ea, quam habent duo quadrata B A, A D, ad duo quadrata A D. Per Lemma ergo antecedens vniuersalius propositum, à puncto A, vertice dati trianguli B A D, ducatur A F, vt duo quadrata B A, A D, sint ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, vt A D, ad H; & ex triangulo F A D, reuoluto circa F D, fiat conus A F C. Quem dico esse quæsitum.



Nam, vt A D, ad H, sic duo quadrata B A, A D, ad rectangulum F A D, cum quadrato A D, nempe, ex sæpe dictis, perimeter portionis A B C, ad perimetrum coni A F C. Determinatio est euidens, quia aliter Problema esset insolubile, vt consideranti fiet manifestum.

PRO-

PROBL. XXXI. PROP. LXX.

Idem.

HOC idem Problema soluetur aliter, & facilius. Inueniatur conus E A C, cuius perimeter sit æqualis perimetro portionis A B C. Deinde fiat, vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad aliam, quæ ex determinatione, erit maior dupla A D. Quare, si ex ipsa auferatur æqualis A D, reliqua erit maior ipsa A D. Ergo poterit duci à puncto A, in D B. Ducatur ergo vbicunque cadat, & sit A F; & fiat conus, vt prius, A F C. Quem assero esse quæsitum.

Demonstratio est facilis; quia vt A D, ad H, sic E A, cum A D, ad F A, cum A D, nempe (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum E A D, cum quadrato A D; nempe perimeter coni A E C, ad perimetrum coni A F C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

DVo sequentia Problemata, quoad solida ab alijs demonstrantur, ac soluuntur, à nemine verò, quod sciam, quoad superficies; quare ipsos soluemus quoad superficies.



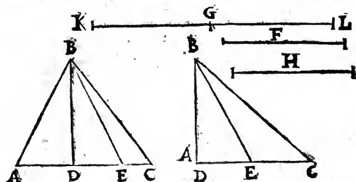
LEM. XL. PROP. LXXI.

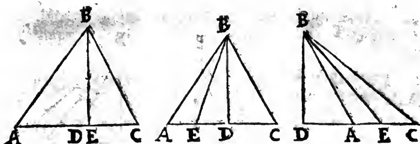
In dato triangulo ducto perpendiculo ab angulo verticis in basim, ducere ab eodem angulo aliam lineã in basim protractam etiam si opus sit, vt rectangulum sub ducta, & sub perpendiculo, vna cum rectangulo sub vno latere, & sub eodem perpendiculo, sit ad hoc idẽ rectangulum, cum quadrato alterius lateris, in data proportione.

DAtum triangulum sit A B E, data verò ratio, quã habet A B, ad H; & sit ducta perpendicularis B D. Oportet à puncto B, ducere B C, vbicunque occurrentem A E, vt rectangulum C B D, cum rectan- A B D, sit ad idem rectangulum A B D, cum quadrato B E, vt A B, ad H.

Patet in primis, Lemma quinque habere casus, secundum diuersitatem anguli verticalis, & diuersum modum casus perpendiculi. Poteſt enim, vel cadere inter A, E, vt in prima figura; vel in ipso puncto A, vt in secunda, quando scilicet perpendiculum est idem, ac latus B A; vel in ipso puncto E, vt in tertia, quando scili-

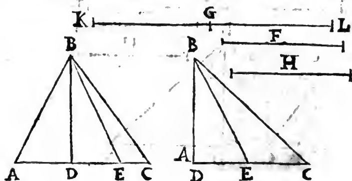
ſcilicet eſt idem, ac latus B E; vel extra A E, ad partes E, vt in quarta; vel tandem extra A E, ad partes A, vt in quinta. In primo, quarto, & quinto caſu, oportet, quod ſi proportio ſit minoris inæqualitatis, tamen ſemper ſit

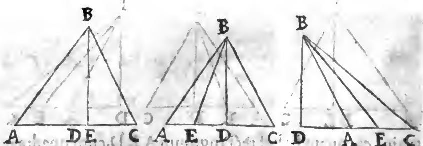




maior ea, quam habet rectangulum A B D, cum quadrato B D, ad rectangulum A B D, cum quadrato B E. In ſecundo caſu oportet eſſe maiorem ea, quam habent duo quadrata B A, ad quadrata B A, & B E. Tādem in tertio caſu, oportet ſemper eſſe proportionem maioris inæqualitatis. Determinationes facilè erunt manifeſtæ conſideranti; nam, ſi aliter eſſet, quam determinatum eſt, B C, non poſſet duci; nam, vel eſſet æqualis

lis B D, vel minor ea. His præhabitis, Fiat, vt perpendiculum B D, ad latus B E, sic B E, ad F; deinde fiat vt H, ad A B, sic composita ex A B, & F, ad K L, quam aio futuram maiorem ipsis A B, B D, (vt patebit inferius.) Si ergo à maiori K L, auferatur K G, æqua-





lis A B, reliqua G L, erit maior B D. Ergo poterit duci à puncto B, ad aliquod punctum lineæ A E, etiam productæ, si opus sit; ducatur, & sit B C. Dico factum esse, quod proponebatur. Patet. Nam, quoniam factum est, vt H, ad A B, sic A B, cum F, ad K L, nempe ad duas A B, B C; ergo conuertendo, erit vt A B, ad H, sic A B, cum B C, ad A B, cum F. Sed vt C B, cum

B A,

BA, ad BA, cum F, sic (sumpta communi altitudine BD,) rectangulum CBD, cum rectangulo ABD, ad idem rectangulum ABD, cum rectangulo sub BD, in F, nempe cum quadrato BE, (quia factum est, vt BD, ad BE, sic BE, ad F.) Ergo vt AB, ad H, sic duo rectangula CBD, & ABD, ad idem rectangulum ABD, cum quadrato BE. Quod erat faciendum.

Quòd KL, sit maior AB, BD, patet ex processu demonstrationis, & ex Lemmatis determinatione.

SCHOLIVM.

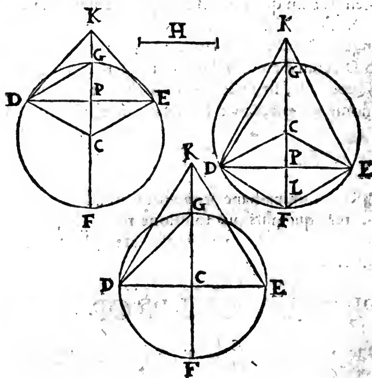
PRoposuimus hanc propositionem adeò vniuersaliter, quamuis pro solutione futuri Problematis, non indigeamus tanta vniuersalitate, ad vberiorem scientiam.

PROBL. XXXII. PROP. LXXII.

Dato sectore sphærico, inuenire rhombum conicum, cuius vnus conus sit idem, ac conus sectoris, & basis conorum sit basis coni sectoris, adeò vt superficies rhombi, sit ad superficiem sectoris, in data proportione.

Hoc

HOC Problema triplicem habet casum, secundùm quod sector, vel est maior, vel minor, vel æqualis hemisphærio, scilicet quando sector degenerat



in hemisphærium; & secundùm diuersos casus, Problema recipit diuersas determinationes. Sit ergo sphæra, cuius diameter GF, centrum C, & sit sector DGEC, vel minor hemisphærio, vt in prima figura, vel maior, vt in secunda, vel æqualis, vt in tertia, (quamuis impropriè hemisphærium dicatur sector, sicut, & rhombus inueniendus, non est rhombus, sed conus, quia hemi-

hemisphærij non est conus) Pariter in secunda figura, sector maior hemisphærio non habet conum, sed est minor portione D G E P, quantitate coni D C E. Intelligatur circulus maximus D G E F, ortus ex sectione, & reliqua, vt moris est; & in omni casu, ducta D G, ac in secunda figura, facta P L, æquali P C, & iunctis D L, L E, ac intellectis conis D C E, D L E, patet istos esse æquales. Data ergo ratio sit, quam habet F C, ad H. Oportet, quod si hæc sit minoris inæqualitatis, sit tamen in primo, & secundo casu, maior ea, quam habet rectangulum C D P, cum quadrato D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G. In tertio verò casu, oportet maiorem esse ea, quam habent duo quadrata C D, ad quadratum C D, cum quadrato D G. Tunc, per antecedēs Lemma, dato triangulo C D G, & ducto perpendiculo D P, ducatur D K, vt rectangulum C D P, cum rectangulo K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, sit vt F G, ad H, & intelligatur rhombus KDCE, in prima, K D L E, in secunda, & conus K D E, in tertia figura. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, in prima figura, proportio rectangulorum C D P, & K D P, ad rectangulum C D P, cum quadrato D G, est eadem cum proportione perimetri rhombi K D C E, ad superficiem sectoris D G C E, ex Archimede sæpe citato. In secunda verò figura, est eadem cum proportione superficiei rhombi K D L E, ad superficiem sectoris D G E C. Quia superficies sectoris constat ex superficie sphærica portionis D G E, & conica coni D C E, cui est æqualis conica coni D L E. In tertia

V figura

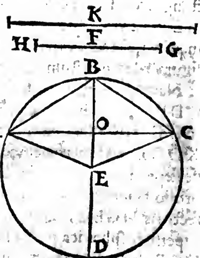
figura autem, est eadem cum ea, quam habet totus perimeter coni K D E, ad totum perimetrum hemisphærij D G E.

Determinationes, & reliqua, petenda sunt ex antecedenti Lemmate; nam præsens Problema, aliud non est, quam antecedens Lemma.

PROBL. XXXIII. PROP. LXXIII.

In data sphæra reperire sectorem, cuius superficies spherica; sit ad superficiem conicam sui coni, in data proportione.

Datæ sphæræ sit diameter D B, centrū E, & data proportio sit, quam habet B E, ad H F. Oportet facere, quod imperatum est. Sumatur ipsius H F, dupla H G, & fiat, vt E B, ad H G, sic H G, ad K; deinde diuidatur B D, in O, vt sit, sicut B E, ad K, sic B O, ad O D, vbicunque cadat punctū O, & per O, duca-



tur

tur perpendicularis A O C, ipsi B D, & reliqua fiant, vt in schemate; & intelligantur solida, &c. Dico inuentū esse sectorem A B C E, siue maiorem, siue minorem hemisphærio, cuius superficies sphærica A B C, sit ad superficiem conicam coni A E C, vt B E, ad H F. Nam, quoniam factum est, vt E B, ad K, sic B O, ad O D, & proportio B E, ad H G, est subduplicata proportionis B E, ad K, & pariter proportio B O, ad O A, est subduplicata proportionis B O, ad O D. Ergo, & vt B E, ad H G, sic B O, ad O A. Et ad consequentium dimidias. Ergo vt B E, ad H F, sic B O, ad dimidiam A O. Sed, vt B O, ad dimidiam A O, sic (sumpta communi altitudine B D,) rectangulum D B O, nempe ei æquale quadratum A B, ad rectangulum sub D B, in dimidiam A O, nempe ad rectangulum sub dimidia B D, nempe sub A E, in totam A O. Ergo vt B E, ad H F, sic quadratum A B, ad rectangulum E A O; nempe superficies sphærica portionis A B C, ad superficiem conicam coni E A C. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

VT diximus supra, hoc Problema comprehendit, tàm sectores maiores, quàm minores hemisphærio, & semper punctum O, diuidet B D, vt possit fieri conus, præterquamquod, quando proportio erit dupla, quia tunc, punctum O, cadet in E, nempe in centro.

Dominus Ricardus Albius Anglus, Vir nobilitate sanguinis, ac eruditione conspicuus, in suo hemisphæ-

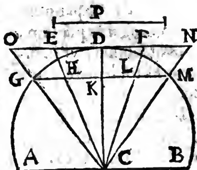
rio diſſecto propoſ. 11. ſoluit hoc Problema. Conum ſegmenti, ad conum rectangulum, in quacumque data ratione conſtituere. Curauimus aliquando, ſoluere hoc Problema in ſuperficiebus conicis, at animaduertimus, Problema poſſe proponi vniuerſalius, nō ſolùm in cono rectangulo, ſed in omni cono, & non ſolùm in hemiſphærio, ſed in quocumque ſolido rotundo orto ex reuolutione circa axem, cuius baſis ſit circulus; ſiue tale ſolidum ſit quodlibet conoides, vel portio ſphæræ, ſphæroidis, vel ſolidum cycloidale, vel quodlibet aliud.

PROBL. XXXIV. PROP. LXXIV.

Dato quolibet ſolido rotundo ADB, circa axim DC, cuius baſis ſit circulus, cuius diameter ſit A C B, vertex eius ſit punctum D, & dato cono ECF, circa eandē axem CD, cuius baſis ſit circulus EDF, tangens ſolidum in vertice D; ſecare ſolidum A D B, & conum ECF, plano GM, baſi parallelo vt facto cono GCM, ſit hic, ad conum HCL, abſciſſum à cono ECF, in data proportione.

Data

DAta proportio sit, quam habet C D, ad P, & fiat vt P, ad D C, sic quadratum D E, ad quadratum D O, & iuncta O C, per punctum G, vbi C O, secat superficiem solidi, ducatur planũ GHKLM, basi A C B, parallelum, & intelligantur coni G C M, H C L. Quos dico esse quæsitos Est enim, vt C D, ad P, sic quadratum O D, ad quadratum D E; nempe (ob parallelas OD, GK.) sic quadratum GK, ad quadratum H K. Vt autem quadratum G K, ad quadratũ H K, sic circulus, cuius diameter G M, ad circulum, cuius diameter H L, nempe conus G C M, ad conum H C L. Quod erat faciendum.

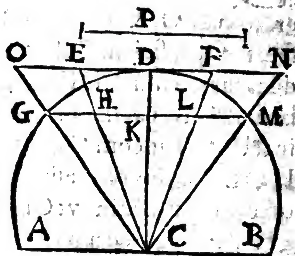


PROBL. XXXV. PROP. LXXV.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies coni GCM, sit ad superficiem conicam coni HCL, vt CD, ad P.

INtelligantur omnia secta plano consueto modo; & datis duabus rectis lineis CD, DE, continentibus angu-

angulum rectum CDE, ducatur CO, vt rectangulum COD, ſit ad rectangulum CED, in data proportione CD, ad P, per propoſit. 55. & per punctum G, agatur planum, & fiant omnia, vt in ſuperiori Problemate. Dico &c.



Nã, ob parallelas OD, GK, facilè patebit, eſſe, vt rectangulum COD, ad rectangulum CED, nempe, vt CD, ad P, ſic rectangulum CGK, ad rectangulum CHK, nempe ſuperficiem coni GCM, ad ſuperficiem coni HCL. Quod erat faciendum.

PROBL. XXXVI. PROP. LXXVI

Datis ijſdem, quæ in ſuperiori Problemate, facere eadem, quæ ibidẽ, vt totus perimeter coni CGM, ad totum perimetrum coni CHL, ſit vt CD, ad P.

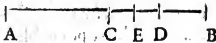
AD ſoluendum hoc Problema, vtemur prop. 68. nempe, ducemus CO, vt rectangulum COD, cum quadrato OD, ſit ad lineam potentem rectangulũ CED, cum quadrato ED, vt CD, ad P; & per punctum

ctum G; ducetur planum, vt prius, & reliqua fient vt prius. Dico perimetrum coni GCM, esse ad perimetrum coni HCL, vt CD, ad P. Demonstratio est facilis, ac proinde omittitur.

LEM. XLI. PROP. LXXVIII.

Sit recta linea AB, secta in C, vel bifariam, vel non bifariam, sed adeò vt AC, sit maior CB. Si rursùm CB, secetur in D, & DC, secetur bifariam in E; tria rectangula ACB, erunt maiora tribus rectãgulis AC, EB, tribus rectangulis EDB, & duobus quadratis CE.

QVoniam enim BE, maior est BD, & DE, EC, sunt æquales; ergo tria rectangula BEC, erunt maiora tribus rectangulis BDE. Sed & tria quadrata CE, sunt maiora duobus quadratis CE; ergo tria rectangula BEC, cum tribus quadratis CE; nempe tria rectangula BCE, erunt maiora tribus rectangulis BDE, & duobus quadratis CE. Sed, si linea AB,



secta

secta est bifaria in C, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis A C E; si verò A C, est maior C B, tria rectangula A C E, sunt maiora tribus rectangulis B C E. Ergo, in vtroque casu, tria rectangula A C E, erunt maiora tribus rectangulis B D E, & duobus quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C, E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt maiora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

EX dictis clarè tenetur, quòd, cùm tria rectangula A C, E B, vna cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint minora, quam tripla vnius rectanguli A C B. Si proponatur. Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursùm secare in puncto D, inter C, B, vt rursùm secta D C, in puncto E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint ad rectangulum A C B, in proportione, vel tripla, vel maiori tripla; tenetur dico, quod semper A C, debet esse minor C B. Et è contra, si proportio sit minor tripla, tenetur, Problema posse solui, siue A C, sit æqualis, siue maior C B.

LEM-

LEM. XLII. PROP. LXXVIII.

Sit recta linea A B, secta in punctis C, D, E, F, G, sic, vt D C, sit dupla A C; D F, sit dupla FB; & DE, sit dupla G B. Patet, quod, cum tota BD, sit sexquialtera D F, & DE, cum G B, sit sexquialtera DE, etiã reliqua EG, erit sexquialtera EF. Si D E, secetur bifariam in H, tria rectangula CDF, cum rectangulo D E B, erunt æqualia, rectangulo A D E, triplo rectangulo C D, H F, triplo rectangulo H E F, & duplo quadrato D H.



QVoniam enim B G, & D H, sunt æquales, quia dimidiæ eiusdem D E; ergo rectangulum D E,

X G B,

GB, erit æquale rectangulo EDH, seù duobus quadratis DH. Communi addito rectangulo DEG. Ergo rectangulum DEG, cum rectangulo DE, GB, nempe totum rectangulum DEB, erit æquale rectangulo DEG, & duplo quadrato DH. Sed rectangulo DEG, est æquale triplum rectangulum HEF, quia GE, est sexquialtera EF, & DE, est dupla HE. Ergo rectangulum DEB, erit æquale triplo rectangulo HEF, & duplo



quadrato DH. Et communibus additis tribus rectangulis CDF. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia tribus rectangulis GDF, (nempe tribus rectangulis CDH, & tribus rectangulis CD, HF,) tribus rectangulis HEF, & duplo quadrato DH. Sed tria rectangula CDH, quia AD, est sexquialtera DC, & DE, est dupla DH, faciunt rectangulum ADE. Ergo tria rectangula CDF, cum rectangulo DEB, erunt æqualia rectangulo ADE, triplo rectangulo CD, HF, triplo rectangulo HEF, & duplo quadrato DH. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM I.

EX dictis infertur, quod si DF, sit maior DC, vnde, & DB, sexquialtera DF, sit maior AD, sexquialtera CD, & ex DB, auferatur KB, æqualis AD. Infer-

fertur inquam, quod, cùm tunc, duo rectangula A D E, & D E, K B, sint æqualia, si hæc hinc inde auferantur, etiam reliqua remanebunt æqualia. Vnde, tria rectangula C D F, cum rectangulo D E K, erunt æqualia tribus rectangulis C D, H F, tribus rectangulis H E F, & duobus quadratis D H.

SCHOLIVM II.

INfertur secundò, quod si imperetur. Datam C F, sectam in puncto D, rursùm diuidere in E, vt diuisa D E, bifariam in H, tria rectangula C D, H F, vna cum tribus rectangulis H E F, & cum duobus quadratis D H, sint ad rectangulum C D F, in data proportione maiori, quam tripla. Infertur inquam, quod Problema erit determinatum. Et determinatio erit, vt facta D B, sexquialtera D F, & ab ipsa ablata B K, sexquialtera C D; proportio data, non sit maior ea, quam habet triplum rectangulum C D F, cum quadrato dimidiæ D K, ad rectangulum C D F. Nam, cum supra probatum sit, illa plana esse æqualia triplo rectangulo C D F, & rectangulo D E K, patet, quod ex omnibus rectangulis factis sub segmentis D K, diuisæ in puncto, rectangulum sub partibus æqualibus, seù quadratum dimidiæ, est maximum.



LEM. XLIII. PROP. LXXIX.

Si recta linea A B, sit taliter secta in C, vt A C, sit, vel minor, vel æqualis tertiæ parti C B; & rursùm C B, secetur in D, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, erunt minora tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim B C, est vel tripla, vel maior tripla A C. Ergo rectangulum B C E, erit, vel æquale, vel maius triplo rectangulo A C E. Sed rectangulũ



B C E, est æquale rectangulo B D E, & duplo quadrato D E, vel C E, vt consideranti patet. Ergo, & rectangulum B D E, cum duplo quadrato C E, erit absolutè maius, triplo rectangulo A C E. Et communi addito triplo rectangulo A C, E B. Ergo triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duobus quadratis C E, erit maius triplo rectangulo A C E, &

triplo

triplo rectangulo A C, E B; quæ omnia faciunt tria rectangula A C B. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

EX dictis infertur, quod si linea A B, secta in C, proponatur taliter secanda in D, vt secta C D, in E, bifariam, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, sint, vel tripla; vel minora, quam tripla, rectanguli A C B. Infertur inquam, quod A C, non potest esse, nec minor, nec æqualis tertiæ parti C B, sed maior.

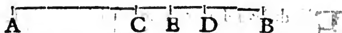
LEM. XLIV. PROP. LXXX.

Si linea A B, secta bifaria in C, rursùm secetur in D, inter C, B, & C D, secetur bifaria in E. Tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

QVoniam enim, tria rectangula B C E, sunt æqualia tribus rectangulis B D E, & sex quadratis D E,

vel

vel C E, vt conſideranti patet; & pariter ſunt æqualia tribus rectangulis A C E; ergo tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & ſex quadratis C E. Et communibus additis tribus rectangulis A C,



E B. Ergo tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, quæ omnia faciunt tria rectangula A C B, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & ſex quadratis C E. Et ablatis hinc inde quatuor quadratis C E, quæ ſunt æqualia quadrato C D. Ergo tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus, quod tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis B D E, & cum duobus quadratis C E, erunt maiora, quam du pla rectanguli A C B. Nam oſtenſa ſunt æqualia tribus rectangulis A C B, minus quadrato C D. Sed hæc ſunt maiora quam dupla rectanguli A C B; quia quadratum C D, eſt minus quadrato C B, nempe vno rectangulo A C B. Vnde habemus, quod ſi proponatur. Diuidere lineam A B, ſectam bifariam in C, rursùm in D, vt diuiſa C D, bifariam in E, tria rectangula A C, E B, cũ tribus BDE,

&

& cum duobus quadratis C E, ſint ad rectangulum A C B, in data proportione minori tripla, hæc tamen proportio debet eſſe maior dupla.

LEM. XLV. PROP. LXXXI.

Sit recta linea A B, taliter ſecta in C, vt A C, ſit maior C B, & C F, ſit ſexquialtera C A, & F K, ſit ſexquialtera C B, quæ C B, ſit ſecta vtcumque in M, & C M, ſit ſecta bifariam in N. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis N M B, & duobus quadratis C N.

Fiat C G, ſexquialtera B C. Quoniam G C, eſt æqualis F K, quia ambæ factæ ſunt ſexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C M, erit æquale rectangulo G C M, nempe rectangulo B G M, & rectangulo G B, M C. Sed rectangulum G B, M C, eſt æquale rectangulum B C N, quia B C, eſt dupla G B, & C N, eſt dimidia

dia C M; & rectangulum B C N, est æquale rectangulo B M N, & duplo quadrato C N; vt consideranti patet; & pariter rectangulum B C M., est æquale quadrato C M, & rectangulo B M C, nempe duplo rectangulo B M N. Ergo rectangulum F K, C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, & quadrato C M. Et communi addito rectangulo K C M. Ergo duo rectangula F K, C M, & K C M, nempe rectangulum F C M, erit æquale tribus rectangulis B M N, duobus quadratis C N, quadrato C M, & rectangulo K C M. Sed quoniam rectangulũ F C M,



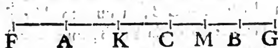
est æquale triplo rectangulo A C N, quia F C, est sexquialtera A C, & C M, est dupla C N; & pariter rectangulum K C M, cum quadrato C M, facit rectangulum K M C. Ergo, & triplum rectangulum A C N, erit æquale triplo rectangulo N M B, duplo quadrato C N, & rectangulo K M C. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectangulis A C, N B. Ergo tria rectangula A C N, cum tribus rectangulis A C, N B, (quæ faciunt tria rectangula A C B,) minus rectangulo K M C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, N B, tribus rectangulis B M N, & duobus quadratis C N. Quod erat ostendendum.

LEM-

LEMMA XLVI. PROP. LXXXII.

Sit recta linea F B, secta in punctis A, K, C, vt in superiori Lem. sed C B, sit secta tantùm bifariam in M. Tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M.

Fiat G C, sexquialtera C B. Quoniam F K, & G C, sunt æquales, quia ambæ sexquialteræ C B; ergo rectangulum F K, C B, erit æquale rectangulo G C B, nempe rectangulo G B C, & quadrato B C. Sed quia tres G B, B M, & M C, sunt æquales, rectangulum



G B C, est æquale duplo quadrato B M, vel M C. Ergo rectangulũ F K, C B, erit æquale duplo quadrato C M, & quadrato C B. Et communi addito rectangulo K C B. Ergo duo rectangula F K, C B, & K C B, nempe rectangulum F C B, erit æquale duobus quadratis C M, quadrato C B, & rectangulo K C B. Sed rectangulum F C B, est æquale tribus rectangulis A C M, quia F C, est sexquialtera C A, & B G, est dupla C M; & pariter

 rectan-

rectangulum K C B, cum quadrato C B, facit rectangulum K B C. Ergo tria rectãgula A C M, erunt æqualia duobus quadratis C M, & rectangulo K BC. Quo hinc inde ablato, & additis tribus rectangulis A C, M B. Ergo tria rectangula A C M, cum tribus rectangulis A C, M B, nempe tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, erunt æqualia tribus rectangulis A C, M B, & duobus quadratis C M. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CVM linea F B, sit eadem in duabus propositionibus superioribus, & eodem modo diuisa, præterquam quod in 82. linea C B, tantùm diuiditur bifariam, & in 81. diuiditur prius in M, postea C M, bifariam in N; & cum rectangulum K B C, sit maius rectangulo K M C, & quocumque alio K M C, quod habeatur secando lineam C B, in puncto M; sequitur etiam, quod tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, sint minora quibuscunque tribus rectangulis A C B, minus rectangulo K M C, quod habeatur ex tali sectione. Vnde, si proponatur. Datam lineam A B, sectam in puncto C, adeò vt A C, sit maior C B, rursùm diuidere in M, inter C, B, vt secta bifariam C M, in N, tria rectangula A C, N B, cum tribus rectãgulis N M B, & cum duobus quadratis C N, sint ad rectangulum A C B, in data proportione minori, quam tripla; patet, hanc proportionem debere esse adeò minorem tripla,

pla, vt tamen ſit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, facto ex compoſita ex K C, quæ ſit exceſſus ſexquialteræ A C, ſuper ſexquialteram C B, & ex C B, in C B, ad rectangulum A C B; vt conſideranti patet, alioquin C B, non poſſet diuidi.

LEM. XLVII. PROP. LXXXIII.

Sit recta linea F G, ſecta in punctis A, B, & C, vt F A, ſit minor A B, ſed maior eius tertia parte, & G B, ſit dimidia A B, & G C, ſit ſexquialtera F A, & C B, ſit diuiſa in M, & A M, biſariã in K. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A M C, erunt æqualia tribus rectangulis F A, K B, tribus K M B, & duobus quadratis A K.



QVoniam rectangulum M A K, eſt æquale duobus quadratis A K, quia M K, & K A, ſunt æquales. Ergo communibus additis tribus rectãgulis A K,

B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-



gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sesquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo G M A. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus

rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, secta in punctis A, C, B, vt in superiori Lemmate, sed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo supra probabitur tria rectangula F A K, esse æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectãgulis F A,



K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia esse, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc est, (quia tres G B, B K, & K A, sunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

ETiam in duobus ſuperioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, ſit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, ſequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, ſint minora quibuſcumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali ſectione. Vnde ſi proponatur. Datam rectam F B, ſectam in A, vt F A, ſit minor A B, ſed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, ſexquialtera A B, etiam G C, ſit ſexquialtera F A; rursùm diuidere ipſam in M, inter C, B, vt ſecta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, ſint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere eſſe minorem tripla, vt tamen ſit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in exceſſum ſexquialteræ F A, ſuper dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet conſideranti, alioquin non poſſet diuidi.



LEM-

LEM·IL· PROP·LXXXV·

Datam rectam lineam AB, ſectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuiſa CD, bifariam in E, tria rectangula AC, EB, cum tribus rectangulis EDB, & cum duobus quadratis CE, ſint ad rectangulum ACB, in data proportione.

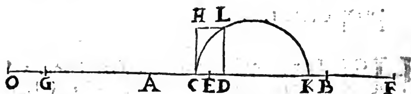
HOC Lemma quinque habet caſus. Nam, vel proportio data eſt maior, vel æqualis, vel minor tripla; & ſi eſt minor, vel AC, eſt æqualis CB, vel maior, vel minor. In omnibus iſtis caſibus, Lem-



ma recipit aliquas determinationes, quas aſſignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & ſit ea, quam habet OC, ad CA. In hoc caſu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habetur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos. 78. & est, quod facta F C, sesquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sesquialtera A C, proportio data nõ sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. proposit. 78. est æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

Quòd verò H C, sit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progressu, probaremus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidia C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data sit tripla, ex Scholio propositionis 77. habemus, quod A C, debet esse minor C B, sed ex Scholio propositionis 79 habetur debere esse maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam



A C, F B, sunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F, nempe D C, quæ est tripla D F. Et omnibus ductis in C D, tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et subduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis commu-

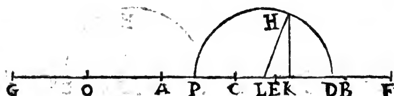
Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectangulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula



A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

SI tandem proportio data sit minor tripla, sed A C, sit minor C B. In primis, ex Schol. proposit. 79. patet, oportere A C, esse maiorem tertia parte C B. Fiat F G, sexquialtera C B, & auferatur F K, sexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, sit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, est tria, & B F, est vnum cum dimidio, A C, est magis, quam



vnum, & eius sexquialtera F K, est maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmissis, ex Scholio proposit. 84. oportere proportionem datam maiorem esse ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, sit media proportionalis K H, erecta normaliter super A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, describatur semicirculus P H D, secans K B, in D, (secabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, est æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua

B M, duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulo M A K, & tribus rectangulis B M, A K. Sed rectangulum M A K, cum rectangulo B M, A K, facit rectangulum B A K; & duo rectangula B M, A K, sunt æqualia rectangulo B M A. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, erunt æqualia rectangulis B A K, & B M A. Sed rectangulum B A K, est æquale rectangulo B G, A M, quia G B, est dimidia B A, & M A, est dupla A K. Ergo duo quadrata A K, cum tribus rectangulis B M, A K, seu B M K, erunt æqualia rectangulo B M A, & rectan-



gulo G B, M A, quæ duo faciunt vnicum rectangulum G M A. Sed quoniam G C, est sesquialtera F A, & A M, est dupla A K; ergo tribus rectangulis F A K, erit æquale rectangulum G C, A M. Sed rectangulum G C, A M, est æquale rectangulo G M A, & rectãgulo C M A. Ergo ablato rectangulo C M A, tria rectãgula FAK, minus rectangulo C M A, erunt æqualia rectangulo G M A. Sed rectangulo G M A, ostensa sunt, supra, æqualia duo quadrata A K, & triplum rectangulum K M B. Ergo tria rectangula F A K, minus rectangulo C M A, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis K M B. Et communibus additis tribus rectangulis F A, K B. Ergo tria rectangula F A K, cum tribus rectangulis F A, K B, nempe tria rectangula F A B, minus rec-

rectangulo C M A, erunt æqualia, tribus rectangulis F A, K B, & tribus rectangulis K M B, & duobus quadratis A K. Quod erat oſtendendum.

LEM. III. PROP. LXXXIV.

Sit recta linea F G, ſecta in punctis A, C, B, vt in ſuperiori Lemmate, ſed A B, tantùm in K, bifariam. Tria rectangula F A B, minus rectangulo A B C, erunt æqualia, duobus quadratis A K, & tribus rectangulis F A, K B.

NAM eodem modo, quo ſupra probabitur tria rectangula F A K, eſſe æqualia rectangulo G C, A B, nempe rectangulo G B A, & rectangulo C B A. Quo ablato hinc inde, & additis tribus rectágulis F A,

F A C K B G

K B; patebit, tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, æqualia eſſe, tribus rectangulis F A, K B, & rectangulo G B A, hoc eſt, (quia tres G B, B K, & K A, ſunt æquales,) duobus quadratis A K. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

ETiam in duobus ſuperioribus Lemmatibus, patet, lineam F B, diuidi eodem pacto, præterquã quod quando punctum M, cadit in C. Vnde cum rectangulum C B A, ſit maius omnibus, quæ habentur, quando punctum M, cadit inter C, B, ſequitur etiam, quod tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, ſint minora quibuſcumque tribus rectangulis F A B, minus rectangulo C M A, quod habeatur ex tali ſectione. Vnde ſi proponatur. Datam rectam F B, ſectam in A, vt F A, ſit minor A B, ſed maior eius tertia parte, & in C, inter A, B, vt facta G A, ſexquialtera A B, etiam G C, ſit ſexquialtera F A; rurſùm diuidere ipſam in M, inter C, B, vt ſecta A M, bifariam in K; tria rectangula F A, K B, cum tribus rectangulis K M B, & cum duobus quadratis A K, ſint ad rectangulum F A B, in data proportione minori quam tripla; patet hanc proportionem adeò debere eſſe minorem tripla, vt tamen ſit maior ea, quam habent tria rectangula F A B, minus rectangulo C B A, facto ex A B, in exceſſum ſexquialteræ F A, ſuper dimidiam A B, ad rectangulum F A B. Quod facilè patet conſideranti, alioquin non poſſet diuidi.

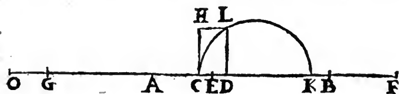


LEM-

LEM. II. PROP. LXXXV.

Datam rectam lineam AB, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt diuisa CD, bifariam in E, tria rectangula AC, EB, cum tribus rectangulis EDB, & cum duobus quadratis CE, sint ad rectangulum ACB, in data proportione.

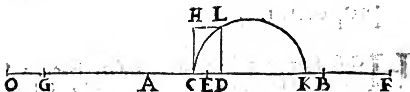
HOC Lemma quinque habet casus. Nam, vel proportio data est maior, vel æqualis, vel minor tripla; & si est minor, vel AC, est æqualis CB, vel maior, vel minor. In omnibus istis casibus, Lem-



ma recipit aliquas determinationes, quas assignabimus vnicuique. Sit ergo proportio data maior quam tripla, & sit ea, quam habet OC, ad CA. In hoc casu, Lemma recipit duas determinationes, vna, quæ habetur

tur ex Scholio propositionis 77. est, quod A C, sit minor C B; alia, quæ habetur ex Scholio 2. propos 78. & est, quod facta F C, sexquialtera C B, & ab ipsa ablata F K, sexquialtera A C, proportio data nō sit maior ea, quam habet triplum rectangulum A C B, cum quadrato dimidiæ C K, ad rectangulum A C B.

Quoniam O C, est maior tripla C A, fiat G C, eius tripla, & super C K, fiat semicirculus, & fiat, vt C A, ad O G, sic rectangulum A C B, ad quadratum C H, lineæ erectæ perpendiculariter à puncto C, super A B. Patebit inferius, hanc non esse maiorem dimidia C K.



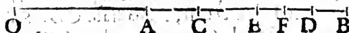
Si ergo per punctum H, ducatur H L, parallela A B, hæc occurret semicirculo. Occurrat in L, & dimittatur perpendicularis L D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam enim, conuertendo, factum est, vt O G, ad C A, sic quadratum C H, ad rectangulum A C B. Ergo & tribus vicibus componendo, vt O C, ad C A, sic quadratum C H, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed quadratum C H, est æquale quadrato D L, seù rectangulo C D K. Ergo, & vt O C, ad C A, sic rectangulum C D K, cum tribus rectangulis A C B, ad rectangulum A C B. Sed triplum rectangu-

tangulum A C B, cum rectangulo C D K, ex Schol. 1. proposit. 78. est æquale triplo rectangulo A C, E B, triplo rectangulo E D B, & duobus quadratis C E. Ergo & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C, E B, cum triplo rectangulo E D B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A C B.

Quòd verò H C, sit minor dimidia C K, patet ex determinatione, alioquin, eodem progressu, probaremus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, cum quadrato maioris dimidiæ C K, ad rectangulum A C B. Quod repugnat determinationi.

SI verò proportio data sit tripla, ex Scholio propositionis 77. habemus, quod A C, debet esse minor C B, sed ex Scholio propositionis 79 habetur debere esse maiorem eius tertia parte. Fiat ergo B F, æqualis A C, & ex F B, auferatur F D, æqualis dimidiæ C F, quæ ex determinatione poterit auferri. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E. Quoniam



A C, F B, sunt æquales; ergo, & earum triplæ erunt æquales. Vnde tres A C, erunt æquales etiam tribus B D, & tribus D F; nempe D C, quæ est tripla D F. Et omnibus ductis in C D; tria rectangula A C D, erunt æqualia tribus rectangulis B D C, & quadrato C D. Et subduplatis omnibus, tria rectangula A C E, erunt æqualia tribus rectangulis B D E, & dimidio quadrati C D, nempe duobus quadrati C E. Et additis commu-

 nibus

ribus tribus rectangulis A C, E B; tria rectangula A C E, cum tribus rectangulis A C, E B, (nempe tria rectangula A C B,) erunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus E D B, & duobus quadratis C E. Ergo hæc sunt tripla vnius rectanguli A C B, nempe sunt ad ipsum, vt O C, ad C A. Quod erat faciendum.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit æqualis C B. Patet ex Scholio propos. 80. debere esse

G O A C B D B

maiorem dupla. Fiat G C, tripla C A. Ergo G O, ex determinatione, erit minor A C, vel C B. Si ergo inter G O, & C B, inueniatur media, erit minor C B. Sit hæc C D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Diuidatur C D, bifariam in E. Quoniam rectangulum G O, C B, est æquale quadrato C D. Ergo cõmuni addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe totum rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Sed quoniam G C, est tripla C A, rectangulum G C B, erit æquale triplo rectangulo A C B. Ergo, & triplum rectangulum A C B, erit æquale rectangulo O C B, & quadrato C D. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus quadrato C D, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed vt O C, ad C A, sic rectangulum O C B, ad rectangulum A C B, Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus quadrato C D, ad rectangulum A C B. Sed tria rectangula A C B, minus

qua-

quadrato C D, ex propositione 80 sunt æqualia, tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis E C. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B.

SI verò proportio data sit minor tripla, sed A C, sit maior C B. Fiat C G, tripla C A, & fiat C F, sexquialtera A C, & ex ipsa auferatur F K, sexquialtera B C. Determinatio huius casus est, ex Scholio propos. 82. quod sit maior ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B.



Inter G O, C B, sit media proportionalis C H, erecta normaliter à puncto C, super A B, & diuisa K C, bifariam in L, & iuncta L H; centro L, interuallo L H, fiat semicirculus P H D, qui, vt patebit, secabit C B, in D. Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Rectangula enim G O, C B, & P C D, sunt æqualia inter se, quia ambo sunt æqualia eidē quadrato H C, ex constructione. Sed rectangulum P C D, est æquale rectangulo K D C, quia P K, est æqualis C D. Ergo rectangulum K D C, erit æquale rectangulo G O, C B.

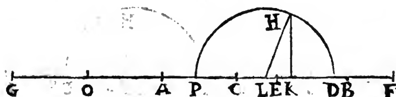
Ergo communi addito rectangulo O C B, duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe rectangulum G C B, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo K D C. Sed quia G C, est tripla A C, rectangulum G C B, est æquale tribus rectangulis A C B. Ergo tria rectangula A C B, erunt æqualia rectangulis O C B, & K D C. Quo hinc inde ablato, tria rectangula A C B, minus rectangulo K D C, erunt æqualia rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K D C, ad rectangulum A C B. Sed, per proposit. 81. tria rectangula



A C B, minus rectangulo K D C, sunt æqualia tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E. Ergo, & vt O C, ad C A, sic tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A C B. Quod erat &c.

Quòd verò semicirculus secet C B, in D, patet ex determinatione, alioquin eodem progressu demonstrabimus esse, vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo K B C, vel minus maiori eo, ad rectangulum A C B. Quod determinationi aduersatur.

SI tandem proportio data sit minor tripla, sed A C, sit minor C B. In primis, ex Schol. proposit. 79. patet, oportere A C, esse maiorem tertia parte C B. Fiat F G, sexquialtera C B, & auferatur F K, sexquialtera A C. Iam punctum K, cadet inter C, B; nam cum A C, sit maior tertia parte C B; ergo, quorum C B, est tria, & B F; est vnum cum dimidio, A C, est magis, quam



vnum, & eius sexquialtera F K, est maior vno cum dimidio, nempe maior B F. Patet ergo, his præmissis, ex Scholio proposit. 84. oportere proportionem datam maiorem esse ea, quam habent tria rectangula A C B, minus rectangulo K B C, ad rectangulum A C B. Secetur ergo C K, bifariam in L, & inter G O, & C B, sit media proportionalis K H, erecta normaliter super A B, à puncto K, & iuncta L H, centro L, interuallo L H, describatur semicirculus P H D, secans K B, in D, (secabit enim, vt patebit.) Dico punctum D, esse quæsitum. Secetur C D, bifariam in E.

Quoniam rectangula G O, C B, & P K D, sunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato K H; & rectangulo P K D, est æquale rectangulum C D K. Ergo rectangulum G O, C B, erit æquale rectangulo C D K.

Qua

Quare, communi addito rectangulo O C B. Ergo duo rectangula G O, C B, & O C B, nempe vnicum rectangulum G C B, seu triplum rectangulum A C B, quia G C, est tripla C A, erit æquale rectangulo O C B, & rectangulo C D K. Quo hinc inde ablato, triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, erit æquale rectangulo O C B. Sed rectangulum O C B, est ad

ad rectangulum A C B, vt O C, ad C A. Ergo, & vt O C, ad C A, sic triplum rectangulum A C B, minus rectangulo C D K, hoc est, ex proposit. 8, tria rectangula A C, E B, cum tribus rectangulis E D B, & cum duobus quadratis E C, ad rectangulum A C B. Quod erat faciendum.

Assumptum patet ex determinatione, & ex processu demonstrationis, & etiam ex his, quæ dicta sunt in alijs casibus.

LEM-

LEM. L. PROP. LXXXVI.

Sit recta linea A B, secta in punctis C, & D, vtcumque, & C D, sit secta bifariam in E. Rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, cum rectangulo sub composita ex D A, & dupla A C, in dimidiā C D, nempe in C E, erit æquale tribus rectangulis A C, E B, tribus rectangulis E D B, & duobus quadratis C E.

NAM rectangulum sub composita ex D A, A C, in sexquialteram D B, æquatur duobus rectan-



gulis sub A C, in sexquialteram D B, & rectangulo sub C D, in sexquialteram D B. Rectangulum verò sub dupla A C, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo A C, D B. Et pariter rectangulum sub C D, in sexquialteram D B, æquatur triplo rectangulo E D B.

Ergo

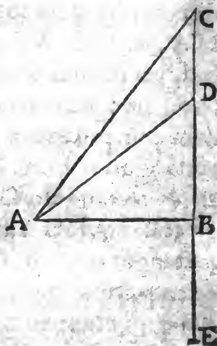
DAta proportio sit, quam habet A B, ad K, & data A B, secta in puncto E, rursùm secetur in H, inter E, B, vt secta E H, bifariam in C, sit, vt A B, ad K, sic triplum rectangulum A E, C B, cum triplo C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A E B, per propos. 85. & per punctum H, agatur planũ G H L, plano D E F, parallelum, & fiat conus D H F. Dico factum esse, quod proponebatur.

Nam, per ab alijs ostensa, præcipuè à Caualerio lib. 3. Geometr. indiuisib. propos. 3. proportio segmenti intermedij G D F L, ad conum D H F, est eadem, cum proportione rectanguli compositæ ex H A, & A E, in sexquialteram B H, vna cũ rectangulo compositæ ex H A, & dupla A E, in E C. Sed, per propos. antecedentem, hæc proportio est eadem cum proportione tripli rectanguli A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B. Sequitur ergo, quod, vt triplũ rectangulum A E, C B, cum triplo rectangulo C H B, & cum duplo quadrato C E, ad rectangulum A E B, sic sit segmentum intermedium G D F L, ad conum D H F, & A B, ad K. Vnde cum præsens Problema non sit aliud, quam propos. 85. sequitur recipere easdem determinationes cum ipsa. Quare &c.

LEM. LI. PROP. LXXXVIII.

Sint duo triangula rectangula ABD, ABC, quorum angulus rectus, qui ad B. Dico DB, ad DA, hypotenuſam minorem, habere minorem proportionem, quam habet BC, ad CA, hypotenuſam maiorem.

QVoniam enim quadratum BC, maius eſt quadrato BD, ergo quadratum AB, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam ad quadratum BC. Et componendo, quadratũ AB, cum quadrato BD, nempe quadratum AD, ad quadratum BD, habebit maiorem proportionem, quam quadratum AB, cum quadrato BC, nempe quadratum AC, ad quadratum CB. Quare, & linea AD, ad lineam DB, habebit maiorem proportionem, quam AC, ad CB. Et conuertendo BD, ad DA, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA.



SCHO-

SCHOLIVM.

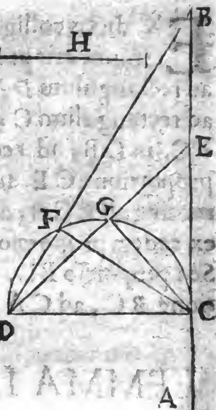
EX dictis colligitur, quod si producatur C B, in E, minor erit proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, proportione rectanguli E C B, ad rectangulum C A B. Nam, proportio rectanguli sub E C, in D B, ad rectangulum D A B, componitur ex proportione C E, ad A B, & B D, ad D A; & proportio rectanguli E C B, ad rectangulum C A B, componitur ex eadem proportione E C, ad A B, & B C, ad C A. Sed proportio B D, ad D A, ostensa est minor proportione B C, ad C A. Quare patet propositum.

LEMMA LII. PROP. LXXXIX.

Data recta linea A B, & data D C, ei perpendiculari, ducere à puncto D, D E, occurrentem B C, inter B, C, vt rectangulum sub B A, in E C, sit ad rectangulum E D C, in data proportione.

HOC Lemma est determinatum, & determinatio est, quod ducta B D, proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C. Quæ determinatio patet ex superiori Scholio.

Sit ergo proportio data, quam habet H, ad D C, & super D C, fiat semicirculus ad partes B C, secans B D, in puncto F, & iungatur F C; deinde fiat vt B A, ad H, sic D C, ad aliam, quæ infra ostendetur minor C F; quæ aptetur à puncto C; & sit C G, & per puncta D, G, ducatur D G E, occurrens B C, in E. Dico factum esse, quod imperebatur.



Quoniam enim proportio D C, ad H, componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt B A, ad H, sic facta est D C, ad C G; & propter similitudinem triã gulorum DCG, & D E C, vt D C, ad C G, sic est D E, ad E C. Ergo proportio D C, ad H, componetur quoque ex proportionibus D C, ad A B, & D E, ad E C. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Ergo, & vt D C, ad H, sic rectangulum E D C, ad rectangulum sub A B, in C E. Quare, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub B A, in C E, ad rectangulum E D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, minor sit C F; patet, quia si esset æqualis, vel maior, eodem discursu probaretur esse H, ad D C, vel in æquali, vel in maiori proportione rectanguli A B C, ad rectangulum B D C. Quod est contra propositam determinationem.

PRO-

PROBL. XXXVIII. PROP. XC.

Datis iisdem, quæ in antecedenti Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti G D F L, sit ad superficiem conicam coni HDF, in data proportione.

ETiam hoc Problema est determinatum eadem determinatione, qua determinatum est Lemma antecedens, nempe, est necesse, quod proportio data sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, prius ducta B D. Sit proportio data, quam habet A B, ad K, & datis duabus rectis lineis A B, & D E, sibi inuicem perpendicularibus, ducatur à puncto D, linea D H, occurrens E B, inter E, B, per antecedens Lemma, vt sit sicut A B, ad K, sic rectangulum sub A B, in H E, ad rectangulum H D E, & per punctum H, agatur planũ



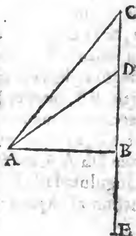
GHL, & fiat conus DHF. Dico factum esse, quod imperebatur. Nam, vt rectangulum sub A B, in E H, ad rectangulum H D E, seù vt A B, ad K, sic superficies sphærica segmenti G D F L, ad superficiem conicam coni D H F, vt elicitur ex Archimede lib. 1. de sphæra, & Cylindro proposit. 40. & 41. Quod erat faciendum.

Quod verò determinatio sit ea, quæ assignata est; patet, qui a præsens Problema, nón est aliud, quam antecedens Lemma.

LEMMA LIII. PROP. XCI.

Datis iisdem, quæ in Proposit. 88. Dico, quod BD, ad DA, cum AB, habebit minorem proportionem, quam BC, ad CA, cum AB.

NAM, cum probatum sit BD, ad DA, habere minorem proportionem proportione BC, ad CA; & pariter, cùm minor BD, ad BA, habeat minorem proportionem, quam maior CB, ad BA. Ergo DB, ad vtrasque simul DA, AB, habebit minorem proportionem, quam



quam CB, ad vtrasque simul CA, AB. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Etiam ex Lemmate præsenti elicitur, rectangulum sub EC, in DB, ad rectangulum compositæ ex DA, AB, in AB, nempe ad rectangulum DAB, cum quadrato AB, habere minorem proportionem, quam rectangulum ECB, ad rectangulum CAB, cum quadrato AB. Etenim eodem modo, quo factum est supra, discurretur, & patebit propositum.

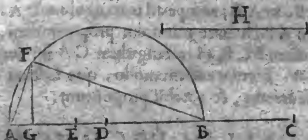
LEM. LIV. PROP. XCII.

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & data proportione vnius lateris ad aliud latus simul cum hypotenusa, inuenire triangulum.

Data hypotenusa sit AB, super quam fiat semicirculus, & data ratio sit, quam habet H, ad AB, quam patet oportere esse minoris inæqualitatis. Fiat ergo, vt AB, ad H, sic H, ad BC, positam in directum ipsi AD, cui AB, fiat æqualis BD; deinde fiat, vt AC, ad CD, ita AB, ad BE; & à puncto *A*, aptetur AF, æqualis AE, & ducatur FB. Dico triangulum *A*FB, esse

esse quæsitum, & in eo esse, vt H, ad A B, sic B F, ad compositam ex B A, A F.

Quoniam enim est vt A B, ad B E, sic (sumpta communi altitudine A B,) quadratum A B, ad rectangulum A B E, & vt quadratum A B, ad rectangulum A B E, sic duo quadrato A B, ad duo rectangula A B E.



Ergo, & vt A B, ad B E, sic erunt duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E. Sed pariter vt A B, ad B E, sic (sũpta cõmuni altitudine A E,) est rectangulũ B A E, ad rectangulũ A E B, & duo rectangula B A E, ad duo A E B. Ergo erit vt A B, ad B E, sic tam duo quadrata A B, ad duo rectangula A B E, quam duo rectangula B A E, ad duo rectangula A E B. Ergo erit, vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, vel vt A B, ad B E, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Sed A B, ad B E, facta est, vt A C, ad C D. Ergo, & vt A C, ad C D, sic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad duo rectangula A B E, cum duobus rectangulis A E B. Et ad consequentium dimidia.

Ergo

Ergo, vt A C, ad C B, sic duo quadrata A B, cum duobus rectangulis B A E, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B. Et diuidendo, vt A B, ad B C, sic excessus duorum quadratorum A B, cum duobus rectangulis B A E, super rectangulum A B E, & super rectangulum A E B, ad rectangulum A B E, cum rectangulo A E B, simul. Sed talis excessus, est æqualis vno quadrato *A* B, vno quadrato A E, & duobus rectangulis B *A* E; quia vnicum quadratum A *B*, excedit rectangula A *B* E, & *A* E B, ipso quadrato A E. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, sic quadratum A *B*, cum quadrato A E, seù cum quadrato A F, quia A E, & A F, factæ sunt æquales, & cum duobus rectangglis B A E, seù B A F, ad rectangulum A *B* E; cum rectangulo A E B. Sed quadratum A B, cum quadrato A F, & cum duobus rectangulis B A F, est æquale quadrato compositæ ex B A, & A F. Et pariter, rectangulum A *B* E, cum rectangulo A E *B*, est æquale excessui quadrati A B, super quadratum A E, seù A F, cui etiam excessui, est æquale quadratum F B. Ergo, & vt A *B*, ad *B* C, seù vt quadratum lineæ A *B*, ad quadratum lineæ H, sic quadratum compositæ ex *B* A, A F, ad quadratum lineæ F *B*. Quare conuertendo, vt quadratum H, ad quadratum A *B*, sic quadratum F *B*, ad quadratum compositæ ex F A, & A *B*. Quare, & vt H, ad A B, sic F B, ad compositam ex F A, A B. Quod erat faciendum.

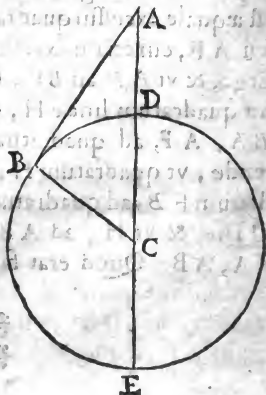


SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate poteſt etiam ſolui ſequens Problema; nempe triangulum rectangulum conſtituere, vt totus perimeter triãguli, ſit ad vnum duorum laterũ, in data proportione; vt conſideranti patet. Sed hoc Lemma poteſt facilius ſolui præmiſſo Lemmate ſequenti.

LEM. LV. PROP. XCIII.

Quodlibet latus trianguli rectanguli, eſt medium proportionale, inter compoſitam ex hypotenuſa, & ex alio latere, & inter differentiam eorundem.



SIT triangulum rectangulum A B C, cuius angulus rectus, qui ad B. Dico, quod v. g. A B, erit media proportionalis inter compoſitam ex A C, C B, & inter differentiam earundem A C, C B. Centro C, interuallo C B, deſcribatur circulus ſecans C A, in D, & A C, producta ei occur-

currat in E. Quoniam ergo A B, tangit circulum, quia angulus A B C, est rectus; ergo quadratum A B, est æquale rectangulo E A D. Sed A D, est differentia inter A C, C D, seu inter A C, C B; & A E, est composita ex A C, C E, hoc est C B. Quare patet propositum.

LEMMA LVI. PROP. XCIV.

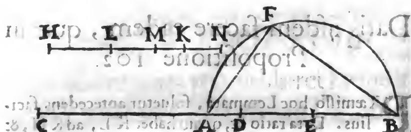
Datis iisdem facere eadem, quæ in Propositione 102.

Præmisso hoc Lemmate, soluetur antecedens facilius. Data ratio sit, quam habet K L, ad K H; & fiat vt H K, ad K L, sic K L, ad K M, & M K, producatur in N, vt M N, sit dupla M K. Pariter B A, producatur in C, vt C B, sit dupla B A, & fiat vt H N, ad N M, sic C B, ad B D; & D B, secetur bifariam in E, & super A B, facto semicirculo, in ipso à puncto A, aptetur A F, æqualis A E, & iungatur F B. Dico trian-

 gu-

gulum A F B, esse quæsitum, & in ipso esse, vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B.

Quoniam enim factum est, vt H N, ad N M, sic C B, nempe dupla A B, ad B D. Ergo & diuidendo, vt H M, ad M N, sic B A, cum A D, ad D B. Et ad consequentium dimidia. Ergo, vt H M, ad M K, sic B A, cum A D, ad D E. Et componendo, vt H K, ad K M,



sic A B, cum A E, ad D E, seu ad E B. Sed A E, facta est æqualis A F. Ergo B E, erit differentia inter A B, & A F. Quare erit, vt H K, ad K M, sic B A, cum A F, ad E B, differentiam inter hypotenusam, & latus. Sed H K, ad K L, est in subduplicata ratione H K, ad K M, quia tres H K, K L, & K M, sunt continue proportionales; & pariter, ex Lemmate antecedenti, B A, cum A F, ad F B, est in subduplicata ratione B A, cum A F, ad E B. Ergo, & vt H K, ad K L, sic B A, cum A F, ad F B. Et conuertendo, vt K L, ad K H, sic F B, ad B A, cum A F. Quod &c.

LEM-

LEM. LVII. PROP. XCV.

Datis iisdem, quæ in propoſ. 89. facere eadem, quæ ibidem, adeò vt rectangulum ſub A B, in C E, ad rectangulum E D C, ſimul cum quadrato D C, ſit in data proportione.

HOC etiam Lemma eſt determinatum, & determinatio eſt, quod proportio data ſit minor ea, quam habet rectangulum A B C, ad rectangulum B D C, cum quadrato D C, vt conſtat ex Scholio propoſit. 91. Data ergo proportio ſit, quam habet H, ad D C. Data ergo D C, hypotenuſa trianguli rectanguli, & data proportione, quam habet A B, ad H, inueniatur triangulum rectangulũ D C G, vt ſit, ſicut A B, ad H, ſic compoſita ex C D, D G, ad G C, quæ inferius oſtendetur minor F C, & D G, producatur vſque ad E. Dico factum eſſe, quod imperebatur.

Etenim, vt dictum eſt ſupra, proportio D C, ad H,

componitur ex proportione D C, ad A B, & A B, ad H. Sed vt A B, ad H, sic composita ex C D, D G, ad G C; & vt composita ex C D, D G, ad G C, sic propter similitudinem triangulorum C G D, & E D C, composita ex E D, & D C, ad C E. Ergo proportio quoque D C, ad H, componetur ex proportione D C, ad A B, & ex proportione compositæ ex E D, D C, ad C E. Sed illæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E D C, cum quadrato D C, ad rectangulum A B, C E. Ergo, & conuertendo, vt H, ad D C, sic rectangulum sub A B, in C E, ad rectangulum E D C, cum quadrato D C. Quod erat faciendum.

Quòd verò C G, sit minor C F, patet; alioquin, eodem discursu, concluderetur contra determinationem.

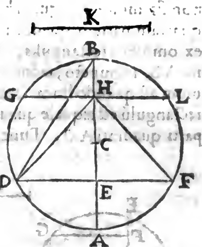
PROBL. XXXIX. PROP. XCVI.

Datis ijsdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies sphærica segmenti intermedij, sit ad perimetrum coni, in data proportione.

Etiam hoc Problema est determinatum, & determinatio est, quod proportio data, sit minor ea, quam habet rectangulum A B E, ad rectangulum B D E, cum

qua-

quadrato D E. Quæ determinatio patet ex superioribus, sicut etiam constructio Problematis. Nam proportio superficiei sphæricæ segmenti intermedij, G D F N, ad perimetrum coni D H F, est eadem cum proportione rectãguli A B, H E, ad rectangulũ H D E, cum quadrato D E; vt deducitur ex Archimede supra citato.



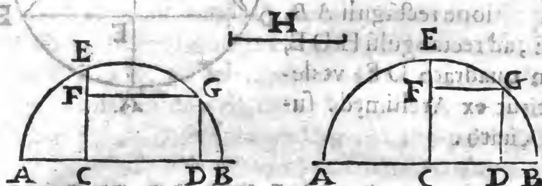
LEMMA LVIII. PROP. XCVII.

Datam rectam lineam A B, sectam in puncto C, rursum diuidere in D, inter C, B; vt rectangulum A C B, sit ad rectangulum A D B, in data proportione.

Data proportio sit, quam habet A B, ad H. Linea autem A C, respectu lineæ C B, se habet tali pacto, vt sit, vel ea minor, vt in prima figura, vel nõ minor, vt in secunda. In primis patet, semper oportere, proportionem A B, ad H, esse talis conditionis, vt

non

non ſit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Res eſt euidens, quia ex omnibus rectangulis, quæ poſſunt haberi ex ſectione A B, in puncto, factis ſub duobus ſegmentis, maximum eſt quando linea ſecatur bifariam; & tunc tale rectangulū eſt æquale quadrato dimidiæ, nempe quartæ parti quadrati A B. Tunc patet, quod ſi A C, ſit minor



C B, Lemma poteſt ſolui in quacumque proportione vniuerſaliter, præter quam quod in qualibet proportione defectus; quia in proportione defectus, Lemma eſt coarctandum, vt non ſit minor ea, quam habet rectangulum A C B, ad quartam partem quadrati A B. Si verò A C, non ſit minor C B; tunc Lemma nequit ſolui niſi in proportione maioris inæqualitatis, quia ſemper rectangulum A C B, eſt maius quocumque rectangulo A D B, vt conſideranti patet. His præmiſſis.

Super A B, fiat ſemicirculus, & à puncto C, erigatur perpendicularis C E; tunc fiat, vt A B, ad H, ſic quadratum E C, ad quadratum lineæ, quam ex determinationibus ſupra expoſitis; patet nunquam eſſe

maio-

maiorem dimidia A B; quare si in C E, sumatur ei æqualis, siue hæc sit semper minor E C, vt in secundo casu, siue sit minor, siue æqualis, siue maior, vt in prima figura, (quamuis ponamus in schemate minorem,) quæ sit C F, & per punctum F, ducamus F G, parallelam A B, hæc semper occurret circumferentiæ. Ducatur ergo, & occurrat in G, & à puncto G, demittatur perpendicularis D G. Dico punctum D, esse quæsitum.

Res est euidens, quia cum factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum E C, ad quadratum C F, seu ad quadratum D G, ei æquale, & quadratis E C, G D, sint æqualia rectangula A C B, & A D B, alterum alteri. Ergo, & vt A B, ad H, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SI vice semicirculorũ constituerentur super A B, semiellipses, nihilominus eodem modo fieret propositum; quia quamuis in ellipsi, quadrato v. g. C E, non sit æquale rectangulum A C B, attamen, ex propos. 21. primi Conic. est, vt quadratum C E, ad quadratum D G, sic rectangulum A C B, ad rectangulum A D B.

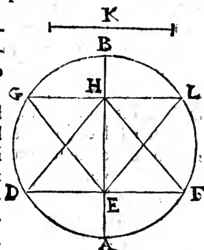
Pariter si loco semicirculorũ, vel semiellipsium vtamur duabus quibuscunque parabolis, nihilominus faciliter habebimus propositum, supponendo A B, esse vnam ex ordinatim applicatis ad axem, vel diametrũ. Nam, si per punctum C, ducatur C E, parallela axi, vel diametro, & fiat vt A B, ad H, sic E C, ad C F, & fiant

 reliqua,

reliqua, vt supra; punctum D, erit quæsitum. Nam, vt alij ostendunt, sed præcipue Cavalerius lib 4. Geometr. indiuisib. propos. 3. vt EC, ad GD, sic est rectangulum ACB, ad rectangulum ADB.

PROBL. XL. PROP. XCVIII.

Datis ijsdem, quæ in superioribus Problematibus, facere eadem, quæ ibidem, vt factis duobus conis, nempe DHF, super basim datam, & GEL, super basim non datam, quorum communis axis sit EH, sint in data proportione.



Quoniam enim duorum conorum est eadem altitudo, ergo sunt inter se, vt bases. Quare conus DHF, erit ad conũ GEL, vt basis DEF, ad basim GHL, seù vt quadratũ DF, ad quadratũ GH, seù vt rectãgulũ AEB, ad rectãgulũ AHB. Quare cõstat præsens Problema reduci ad antece-

tecedens Lemma, & habebimus intentum, vt vnusquisque facile potest cognoscere.

SCHOLIVM.

HIC soluenda venirent Problemata circa superficies horum conorum, sed ipsas reseruamus ad aliud tempus, sicut etiam hæc, nempe. Datam sphæram, vt in superioribus Problematibus, sectam plano D E F, rursùm secare plano G H L, plano D E F, parallelo, vt facto cono G E L, super basim non datam; vel segmentum intermedium G D F L, ad conum G E L; vel superficies segmenti ad superficiem, vel ad perimetrum coni, sit in data proportione. Sed hæc, vt diximus, reseruamus pro alio Opere, quod, Deo fauente, imprimetur.

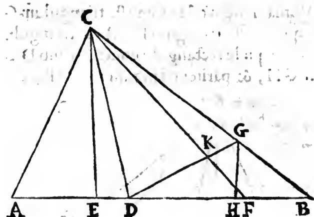


LEMMA LIX. PROP. IC.

Esto triangulum A C B, cuius angulus C, secetur bifariam à linea C D, & latus A C, sit minus latere C B, vnde, & A D, sit minor D B, cui A D, sit facta æqualis D F, & sit ducta C F. Si super basim D B, fiat triangulum æquale triangulo F C B, perpendiculum ipsius ductum à vertice G, semper minus erit D F, seù D A.

QVoniam C B, maior supponitur C A, fiat ipsi C A, æqualis C G, & ducatur D G. Quoniam trianguli A C D, duo latera A C, C D, sunt æqualia duobus lateribus D C, C G, trianguli D C G, alterum alteri, & angulus A C D, est æqualis angulo D C G; ergo basis A D, erit æqualis basi D G, & triangula erunt æqualia. Sed etiam triangulo A C D, est æquale triangulum D C F. Ergo triangula D C F & D C G, erunt æqualia. Quare addito communi triangulo A C D, totum triangulum A C F, erit æquale trapezio A C G D. Quare, & reliquum F C B, erit æquale reliquo D G B.

Sed.



Sed in hoc, dimisso perpendiculo G H, patet ipsum minus esse hypothenusa D G, hoc est ipsa D A, seù D F. Quare patet propositum.

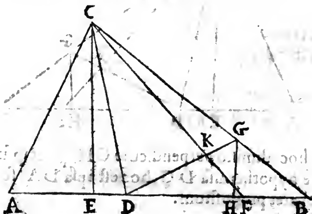
Vel postquam facta sunt omnia, vt supra, & conclusum est triangulum D C G æquale esse triangulo D C F, si auferatur commune triangulum D C K & , addatur commune trapezium F K G B, nihilominus facilius concludetur propositum. Res est clara...

LEMMA LX. PROP. C.

Sint facta, & ostensa eadem, quæ in superiori Lemmate, & sit ductum C E, perpendiculum trianguli A C B. Erit, vt D B, ad B F, sic C E, ad G H.

Quo-

QVoniam supra ostensum est, triangulum G D B, æquale, esse triangulo F C B, & triangulũ B G D, est æquale rectangulo contento sub D B, in dimidiam G H, & pariter triangulum F C B, est æquale



rectangulo contento sub F B, in dimidiam C E. Ergo, & hæc rectangula, & illorum dupla erunt æqualia, nempe rectangulum sub D B, in H G, erit æquale rectangulo sub F B, in C E. Quare, vt D B, ad F B, sic C E, ad G H. Quod erat ostendendum.

LEM. LXI. PROP. CI.

Data base, perpendiculo, & proportione laterum trianguli inuenire triangulum.

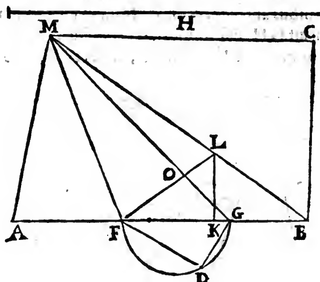
SI proportio data sit æqualitatis, res est adeò facilis, vt pudeat in hoc verba profundere. Si autem sit

sit inæqualitatis; tunc Lemma debet determinari. Si ergo est defectus, vt in præsenti supponimus, determinatio talis est. Oportet proportionem datam, & perpendiculum talis esse conditionis, vt secta base in data proportione, & facto vt maius segmentum ad excessum eius supra minus, sic perpendiculum ad aliam, hæc sit minor minori segmento. Determinatio patet ex propositionibus antecedentibus. Nam in proposit. 99. ostensum est G H, esse minorem D F, seu D A. In 100. verò ostensum est D B, ad B F, esse, vt C E, ad G H.

M H C L O G A F K B D

Sit ergo data basis A B, & data proportio sit, quam habet A B, ad H, perpendiculum verò datum sit B C, erectum normaliter super A B, à puncto B. Diuidatur A B, in F, vt sit, sicut A B, ad H, sic A F, ad F B, fiatque

que F G, æqualis A F, & ſuper F G; fiat ſemicirculus, fiatque vt F *B*, ad B G, ſic C *B*, ad aliam. Patet ex determinatione, hanc eſſe minorem F G. Ergo poterit aptari in ſemicirculo, cuius diameter F G; aptetur, & ſit F D, fiatque ei æqualis F K, atque à puncto K, erigatur K L, normalis ſuper A B, quæ ſit æqualis D G, & per



punctum C, ducta C M, indefinita, & parallela A B, per puncta B, L, ducatur B L M, occurrens C M, in M, (occurret enim, cum anguli M C *B*, C B M, ſint duobus rectis minores;) tunc ducatur M A. Dico triangulum A M B, eſſe quæſitum. Nam eſt ſuper baſi A B, & ſuum perpendiculum C B. Quòd verò ſit, vt A B, ad H, ſic A M, ad M B, ſic patebit. Ducantur M F, M G, & F L. Patet duo triangula A M F, F M G, eſſe æqualia,

pro-

propter bases A F, F G, æquales, & propter eandem altitudinem. Cùm autem factum sit, vt F B, ad B G, sic C B, ad D G, seù ad K L; ergo rectangulum sub F B, in K L erit æquale rectangulo facto sub C B, in B G. Ergo & illorum dimidia, nempe triangula F L B, G M B, erunt æqualia. Quare communi ablato trapezio L O G B, atque addito communi triangulo F M O, triangulum F M L, erit æquale triangulo F M G, seù A M F. Cùm autem super eandem basim M F, sint duo trianguli M L F, & M G F, æqualia, ducta L G, erit parallela M F. Ergo angulus F L G, erit æqualis alterno M F L, & angulus externus A F M, erit æqualis interno, & opposito F G L. Verùm cùm duæ F K, K L, sint æquales duabus F D, D G, & anguli F K L, F D G, ab ipsis contenti sint æquales, quia recti. Ergo, & F L, erit æqualis F G, seù F A. Cùm autem in triangulo L F G, duo latera F L, F G sint æqualia. Ergo anguli quoque ad basim, nempe F L G, F G L, erunt æquales. Sed angulo F L G, est æqualis ei alternus M F L & angulo F G L, ostensus est æqualis ei externus, & oppositus A F M. Ergo habemus duo triangula M F A, & M F L, quæ habent duo latera æqualia duobus lateribus, alterum alteri, & angulus A F M, cōtentus sub æqualibus lateribus vnius, est æqualis angulo contento sub æqualibus lateribus alterius. Ergo basis A M, erit æqualis basi M L, triangulum erit æquale triangulo, & angulus A M F, erit æqualis angulo F M L. Ergo, vt A F, ad F B, seù vt A B, ad H, sic A M, ad M B. Quod erat faciendum.

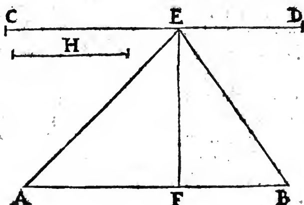
Si proportio data sit excessus, soluetur Lemma faciliter, faciendo, vt prius ex alia parte, & conuertendo.

PROBL. XLII. PROP. CII.

Data A B, magnitudine, & positione, & data CD, ei parallela, tantùm positione; inuenire in C D, punctum E, vt iunctis A E, E B, & ducta perpendiculari E F, & reuolutis triangulis E A F, F E B, circa A B, vt fiant coni; superficies conica coni ex triãgulo A E F, ad superficiem conicam coni ex triangulo F E B, sit in data proportione.

Data ratio sit, quam habet A B, ad H. Problema faciliter soluetur ex antecedentibus Lemmatibus. Nam cum duæ A B, & C D, sint datæ positione, dabitur etiam E F, magnitudine, per Propos. 32. datorum. Data ergo basi A B, & dato perpendiculo E F, & data ratione laterum, quę sit proportio data A B, ad H, inue-

inueniatur triangulum A E B, hoc est duo triangula A F E, B F E, vt sit sicut A B, ad H, sic A E, ad E B. Dico, quod si ex ipsis reuolutis circa A B, fiant coni, quod erunt quęsiti. Nam est vt A B, ad H, sic A E, ad E B, nempe rectangulum A E F, ad rectangulum B E F, nempe, ex



Archimede sæpe citato, superficies conica coni orti ex reuolutione trianguli A F E, circa A F, ad superficiem conicam coni orti ex reuolutione trianguli E F B, circa F B. Quod erat faciendum.

LEMMA LXII. PROP. CIII.

Sphæra ad rhombum sibi inscriptum, est vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum radij circuli, qui est basis rhombi.

SIT in ſphæra, cuiuscentrum E, rhombus inſcriptus B F D G. Dico eſſe &c. Fiat rhombus BADC, cuius latera ſint chordæ quadratis. Quod autē ſphæra ad rhombum BADC, ſit vt quadratū B A, ad quadratum A E, patet; quia, ex Archimede 1. de ſphæra, & Cylindro propoſit. 32. ſphæra eſt talis rhombi dupla, ſicut etiam quadratum B A, eſt duplum quadrati A E. Tunc; quoniā rhōbus BADC, eſt ad rhombum B F D G, vt quadratum A E, ad quadratum F K. Ergo ex æquali, ſphæra ad rhombum B F D G, erit, vt quadratum B A, ad quadratum F K. Quod erat oſtendendum.

PROBL. XXXXII. PROP. CIII.

In data ſphæra inuenire rhombum, vt ſphæra ſit ad rhombum, in data ratione poſſibili.

RAtio poſſibilis eſt, vt proportio data non ſit minor dupla, quia maximus rhombus inſcriptibilium

lium in sphæra, est æquilaterus, qui est sphæræ subduplus. Data ergo sphæra sit A B C D, cuius diametri se se decussantes ad angulos rectos in E, sint A C, B D; & sit ducta B A, & data ratio sit, quam habet B A, ad H; & inter B A, & H, inueniatur media proportionalis, quæ vtique non erit maior A E, sed vel minor, vel ęqualis, vt patebit. Si ęqualis, facto rhombo B A D C, erit quæsitus. Si autem sit minor A E, sit hęc E L, & per punctum L, ducatur L F, parallela ipsi B D, occurrens sphæræ, vel ex vna parte, vel ex alia in F, & per punctum F, acto plano F K G, cui diameter B D, sit perpendicularis, fiat rhombus B F D G. Dico hunc esse quæsitum.

In primo casu, res est clara; nam est, vt A B, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum A E, nempe sphęra ad rhombum B A D C, per antecedens Lemma.

In secundo verò casu, res est clarissima. Nam pariter est, vt B A, ad H, sic quadratum B A, ad quadratum E L, nempe ad quadratum F K; nempe sic sphęra ad rhombum B F D G. Quod erat ostendendum.

Quòd verò media proportionalis inter B A, & H, nō sit maior A E, patet ex determinatione; quia cum B A, non sit minor dupla H; ergo nec quadratum A B, erit minus duplo quadrato L E, seù F K.

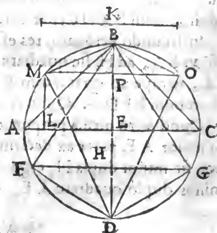


PRO-

PROBL. XLIII. PROP. CV.

In data sphæra, dato rhombo inscribere alium rhombum, ad quem rhombus datus sit, in data ratione possibili.

Ratio possibilis est, vt non sit minor ea, quam habet quadratum semidiametri basis dati ad quadratum semidiametri sphæræ, quia proportio quadrati radij basis dati rhombi, ad quadratum semidiametri sphæræ, est proportio rhombi dati ad rhombũ maximum inscriptibilẽ in sphæra; ergo non potest esse minor ea.



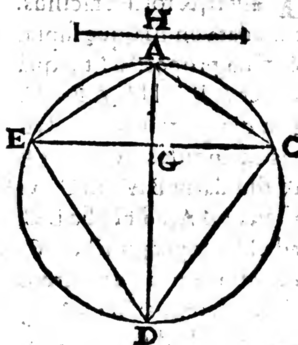
Sit ergo rhombus datus FBGD, in data sphæra A B C D, cuius diametri se secantes ad angulos rectos, sint B D, A C, & data ratio sit, quam habet A B, ad K, & fiat vt A B, ad K, sic quadratũ F H, ad quadratum alterius lineæ, quæ non erit maior A E, sed vel ei æqualis, vel minor. Si æqualis, rhombus B A D C, erit

erit quæsitus. Si minor, per L, acta L M, parallela B D, occurrens circumferentiæ, aut ex vna, aut ex altera parte, in puncto M, & intellecto rhombo M B O D, ipse erit quæsitus. Res est adeò euidens, vt non mereatur prolixiorem discursum.

PROBL. XLIV. PROP. CVI.

In data sphæra inscribere rhõbum, vt superficies conicę conorum, sint ad inuicem, in data proportione.

DAtæ sphæræ diameter sit A D, & data proportio sit, quã habet D A, ad H. Diuidatur D A, in G, vt sit, sicut quadratum D A, ad quadratum H, sic D G, ad G A; & per punctum G, acto plano E G C, cui diameter D A, sit normalis, fiat rhombus A E D C. Quem dico esse quæsitum.



Quoniã enim vt DA,

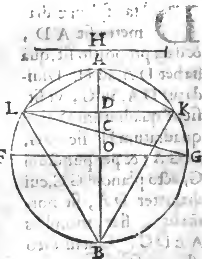
qua-

quadratum, ad quadratum H, ita facta est D G, ad G A; vt autē D G, ad G A, sic (sūpta cōmuni altitudine DA,) rectangulū ADG, DAG, & rectāgulis ADG, DAG, sunt æqualia quadrata DE, AC, alterū alteri. Ergo, & vt quadratū D A, ad quadratū H, sic quadratū DE, ad quadratum A E. Ergo, & vt D A, ad H, sic D E, ad E A. Sed vt D E, ad E A, sic rectangulum D E G, ad rectāngulū A E G; vt autem rectangulum D E G, ad rectangulum A E G, sic superficies conica coni E D C, ad superficiem conicam coni E A C. Ergo &c. Quod &c.

PROBL. XLV. PROP. CVII.

Idem.

Idem Problema soluetur aliter, & forsitā facilius. Sint data omnia, quę supra, & data proportio sit, quā habet A B, ad H. A B, F G, sint diametri se se decussā tes ad angulos rectos in O; & diuidatur B A, in C, vt sit sicut B A, ad H, sic B C, ad C E; & per puncta G C, ducatur linea occurrens circumferentiæ in L; & à puncto L, ducantur L A, L B, & perpēdicularis L D K;



&

& intelligatur rhombus A L B K. Qui vtique erit quæsitus: Cùm enim duo anguli A L C, B L C, sint æquales, propter æqualitatem circumferentiarum A G, G B, quibus insistunt. Ergo vt B C, ad C A, seù, vt B A, ad H, sic B L, ad L A; nempe rectangulum B L D, &c. In reliquis sequatur præcedens demonstratio.

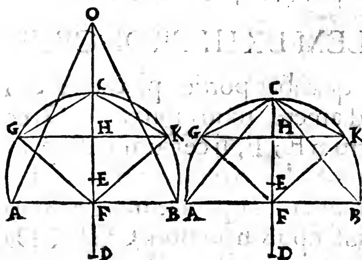
LEM. LXIII. PROP. CVIII.

Sit quælibet portio sphæræ A C B; diameter totius sphæræ C D; centrum E; F, si cētrum basis portionis, & ducto quolibet plano G H K, basi A F B, parallelo, fiat rhombus inscriptus in portione C G F K. Dico portionem A C B, ad rhombum C G F K, esse, vt rectāgulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C.

Fiat, vt D F, ad D F, cum D E, sic C F, ad F O; & fiat conus O A B. Ergo, ex Archimede 2. de sphær. & cylindr. supra citato, conus O A B, erit æqualis portioni A C B. Quoniam verò conus O A B, ad rhombum C G F K, habet proportionem compositam ex propor-

 tione

tione O F, ad F C, & ex proportione quadrati A F, ad quadratum G H. Ergo, & portio A C B, ad rhombum F G C K, habebit proportionem compositam ex ratione O F, ad F C, & ex ratione quadrati A F, ad quadratum G H; nempe ex ratione rectanguli D F C, ad rectan-



gulum D H C. Sed vt O F, ad F C, sic E D, cum D F, ad D F, ex constructione; & proportio rectanguli D F C, ad rectangulum D H C, componitur ex rationibus F D, ad D H, & F C, ad H C. Ergo, & proportio portionis A C B, ad rhombum C G F K, componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D F; D F, ad D H, & F C, ad H C. Sed duæ rationes E D, cum D F, ad D F, & D F, ad D H, faciunt rationem E D, cum D F, ad D H. Ergo quoque proportio portionis ad rhombum componetur ex rationibus E D, cum D F, ad D H, & F C, ad C H. Sed istæ duæ

duæ rationes componunt quoque rationem rectágulorum DFC, & ED, FC, seù EGF, ad rectangulum DHC. Quare patet propositum.

Vel intelligatur conus A C B, super eandem basim, & circa eundem axim cum portione, quæ sit A C B. Ergo portio A C B, ex Archimede 2. de sphær. & Cylin. propof 7. est ad conum A C B, vt D F, cum D E, ad D F; sed vt D F, cum D E, ad D F; sic (sumpta communi altitudine F C,) rectangulum D F C, cum rectangulo D E, C F, hoc est cum rectangulo E C F, ei æquale, ad rectangulum D F C; vt autem conus A C B, ad rhombum C G F K, sic (propter eandem altitudinem C F) est quadratum A F, ad quadratum G H, seù rectangulū D F C, ad rectangulum D H C. Ergo ex æquali, portio A C B, est ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, ad rectangulum D H C. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FOrsitan non erit inutile notasse, proportionem sphæræ, & hemisphærij ad suum rhombum, esse eandem; proportionem verò maioris portionis ad suum rhombum, esse is maiorem, minoris verò minorem. Quòd patet, quia, cùm portio A C B, sit ad rhombum G C K F, vt rectangulum D F C, cum rectangulo E C F, nempe cum quadrato E C, (si portio sit hemisphæriū) ad rectangulum D H C; patet, quod in hemisphærio, rectangulum D F C, seù D E C, seù quadratum E C,

(quia hæc omnia sunt vnum, & idem) cum quadrato E C, est duplum vnius quadrati E C. Quare hemisphęrium ad rhombum sibi inscriptum, est, vt quadratum inscriptibile in circulo maximo, ad quadratum G H, quæ proportio est eadem cum proportione sphæræ ad suum rhombum, per proposit 103. Quod etiam facilius patet, supponendo portionem A C B, esse hemisphærium, & mente intellecto rhombo C G D K, cuius basis eadem G H K. quia cùm duo rhombi C G F K, & C G D K, habeant communem basim G H K, erunt inter se, vt altitudines. vnde cùm in tali casu, altitudo C D, sit dupla altitudinis C F, sicut etiam sphæra est dupla hemisphærij; patet permutando, sphęram ad rhombum G C K D, esse vt hemisphęrium A C B, ad rhombum C G F K.

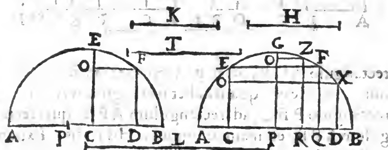
Quòd verò proportio maioris portionis ad suum rhōbum sit maior his, & minoris minor; patet, quia rectāgulum D F C, in primo casu, cum rectangulo E C F, est maius duplo quadrato C E, nempe quadrato inscriptibile in circulo maximo; in secundo verò casu est minus, vt esperienti patebit. Res enim est facilis demonstratu.

LEM-

LEMMA LXIV. PROP. CIX.

Datam A B, vtcumque sectam in C, rursùm secare in D, inter C B, vt rectangulum A C B, vna cum rectangulo dimidiæ A B, in C B, sit ad rectangulum A D B, in data ratione possibili.

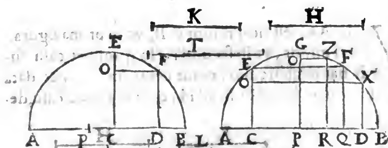
VEL A C, est non minor C B, vt in prima figura, vel minor, vt in secunda. In quolibet casu super A B fiat semicirculus, cuius centrum sit P, & data ratio sit, quam habet A B, ad H; quæ in primo casu, de-



bet esse maior proportione rectanguli A C B, cum rectangulo sub dimidia A B, nempe sub P B, in C B, ad rectangulum A C B, quia sumpto vtcumque puncto D, semper rectāgulum A D B, minus est rectangulo A C B. In secūdo verò casu, potest esse çqualis, maior, & minor.

Nam

Nam, si fiat ipsi C P, æqualis P Q, rectangulum A C B, erit æquale rectangulo A Q B. Si verò punctum D, sumatur inter C, Q, rectangulum factum ex talibus segmentis, erit maius rectangulo A C B. Secus erit, si punctum D sumatur inter Q, B; nam semper tale rectangulum erit minus rectangulo A C B, vt consideranti patet. Si verò proportio data est minor ea, quam habet rectágulum A C B, cum rectangulo P B C ad rectangulum A C B, nempe si rectangulum inueniendum sit maius



rectangulo A C B, patet non oportere rationem datam minorem esse ea, quam habet rectangulum A C B, cum rectangulo P B C, ad rectangulum A P B; quia rectangulum A P B, est maius omnibus. His iactis, Exponatur linea L, potens ambo rectangula A C B, & P B C, & fiat vt A B, ad H, sic L, ad K, & inter L, K, inueniatur media T, quæ in primo casu erit minor E C, erecta normaliter super A B, à puncto C; in secundo autem casu, vel erit æqualis E C, vel maior, sed nunquá maior A P, vel minor, vt patebit inferius. In primo casu, fiat C O,

æqua-

æqualis T, & acta O F, parallela A B, ducatur F D, normalis super A B. Dico punctum D, esse quæsitum. In secundo autē casu, si T, sit æqualis EC, agatur E F, parallela A B, & ducatur F Q, perpendicularis, & punctum Q, erit quæsitum. Si autem T, sit quidem maior C E, sed æqualis A P, punctum P, erit quæsitum. Si verò T, sit quidem maior C E, sed minor A P, seù G P, erectæ normaliter à puncto P, fiat P O, æqualis T, & acta O Z, parallela A B, vel ex vna parte, vel ex alia, & demissa perpendiculari Z R, punctum R, erit quæsitum. Si tandem T, sit minor E C, facta ei æquali C O, & per punctum O, ducta parallela A B, ipsa O X, & à puncto X, demissa perpendiculari X D. Dico punctum D, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est vt A B, ad H, sic L, ad K, & vt L, ad K, sic quadratum L, ad quadratum T, & cū T, sit æqualis in prima figura ipsi F D; in secunda autem vel F Q, vel G P, vel Z R, vel X D. Ergo, & vt A B, ad H, sic quadratum L, ad quadratum F D, in prima figura; in secunda verò, ad quadratum linearum æqualium ipsi T. Sed quadratum L, est æquale rectangulo A C B, & rectangulo P B C, & quadratis linearum æqualium ipsi T, in prima figura, est æquale rectangulum A D B, in secunda verò sunt eis æqualia facta sub segmentis A B, diuisæ in punctis vbi incidunt perpendiculares. Quare, & vt A B, ad H, sic rectangula A C B, & P B C, ad rectangula inuenta, & supra exposita. Quare patet propositum.

Quòd verò linea T, in ambabus figuris habeat

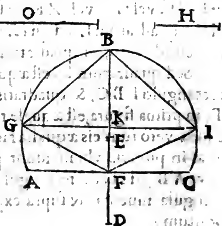
con-

conditiones prius expositas, patet ex determinatione congruente vnicuique casui, quæ determinationes supra sunt expositæ.

PROBL. XLVI. PROP. CX.

Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt portio sit ad rhombum, in data proportione.

DAta portio sit ABC, & DB, sit diameter sphæræ, cuius est portio, E, sit eius centrum, & data ratio sit, quam habet *B* D, ad H. Cùm ergo ex propositione centum, & octo, pateat rationẽ portionis ad rhombum sibi inscriptum esse eandem cum ratione rectanguli DFB cum rectangulo EBF, ad rectangulũ v.g. DKB, inueniatur, per antecedens Lemma, punctum K, secundum hanc conditionem, vt illa duo rectangula sint ad



rectan-

rectangulum DKB, vt BD, ad H. Si per punctum K, agatur planum GKL, parallelum AC, & fiat rhombus GFLB, hic erit quæsitus. Res est euidens.

PROBL. XLVII. PROP. CXI.

In data portione dato rhombo inscripto, inscribere alium rhombum, vt rhombus prius inscriptus, sit ad hunc posteriorem, in data proportione.

HOC Problema est facillimum; quia cum illi duo rhombi sint in eadem altitudine, erunt inter se vt quadrata basium; & quadrata erunt vt rectangula contenta sub segmentis diametri; vnde adhibita congruenter Proposit. 109. habebimus intentum.

LEMMA LXV. PROP. CXII.

Datam rectam lineam FB, sectam in puncto K, rursum in C, diuidere inter K, B, vt rectangulum FCB, cum quadrato KC, sit ad rectangulum FBC, in data proportione.

DAta proportio debet esse talis conditionis, vt si fiat in data proportione F K, ad aliam, hæc sit minor tota F B. Nam si esset æqualis, esset vt F K, ad illã, aliã, hoc est ad FB, ita rectãgulũ FKB, ad rectãgulũ FBK,



vnde KB, nõ posset diuidi in data proportione; & multo minus posset diuidi, si illa alia esset maior F B. Sit ergo proportio data ea, quam habet F K, ad F A, vbicumque cadat punctum A, inter F, B, & fiat vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, ei positam in directum; deinde K B, taliter secetur in C, vt sit sicut G B, ad B A, sic B C, ad C K. Dico punctum C, esse quæsitum.

Quoniam enim factum est, vt K F, ad F A, sic K B, ad B G, & vt K B, ad BG, sic (sumpta communi altitudine K C,) rectangulum B K C, ad rectangulũ sub K C, in B G. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G. Pariter vt K F, ad F A, sic (sumpta communi altitudine C B,) rectangulũ F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo, & vt K F, ad F A, tàm est rectangulum B K C, ad rectangulum sub K C, in B G, quam rectangulum F K, C B, ad rectangulum F A, C B. Ergo & vt K F, ad F A, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangula B K C, & F K, C B, ad rectangula C K, B G, & F A, C B. Sed rectangula B K C, & F K, C B, faciunt rectangulum F C B, cum quadrato C K; quia rectangulum B K C, diuiditur in rectangulum B C K, & in quadratum K C; & rectangulum

gulum B C K, cum rectangulo F K, C B, facit rectangulum F C B. Ergo, & vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangula G B, K C, & F A, C B.

Quoniam verò factum est supra, vt G B, ad B A, sic B C, ad C K. Ergo rectangulum sub G B, in K C, erit æquale rectangulo A B C. Et communi addito rectangulo F A, C B. Ergo rectangulum A B C, cum rectangulo F A, C B, quæ duo faciunt vnum rectangulum F B C, erunt æqualia rectangulis G B, K C, & F A, C B. Sed supra probatum est esse vt K F, ad F A, sic rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad duo rectangula G B, K C, & F A, C B. Quare & vt K F, ad F A, sic erit rectangulum F C B, cum quadrato K C, ad rectangulum F B C. Quod erat ostendendum.

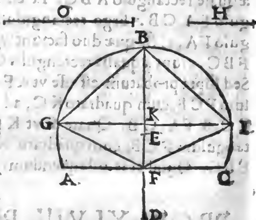
PROBL. XLVIII. PROP. CXIII.

Data qualibet sphæræ portione, inscribere in ipsa rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

DAta portio sit A C B, cuius axis sit B F, & B D, sit tota diameter sphæræ, data proportio sit, quam habet D F, ad H, & fiat vt D F, ad H, sic H, ad O. Dico in primis hoc Problema esse determinatum, & determi-

 natio-

nationem esse, quod proportio data sit talis conditionis, vt si fiat in data proportione DF, defectus axis portionis a diametro sphæræ, ad aliam, quæ sit H, & proportio DF, ad H, continuetur ad tertium terminum O; O, sit minor diametro sphæræ, vt patebit inferius.



Linea ergo DB, diuisa in F, rursum diuidatur in K, inter F, B, vt rectangulum DKB, cum quadrato KF, sit ad rectangulum DBK, vt DF, ad O, per antecedens Lemma, & per punctum K, acto plano GKL plano AEC, parallelo, intelligatur rhombus BGFL, inscriptus in portione. Dico hunc esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt DF, ad O, nempe vt quadratum DF, ad quadratum H, sic rectangulum DKB, cum quadrato KF, ad rectangulum DBk, & rectangulo DkB, est æquale quadratum Gk, & pariter rectangulo DBK, est æquale quadratum GB. Ergo & vt quadratum DF, ad quadratum H, sic quadratum GK, cum quadrato kF, nempe quadratum GF, æquale istis duobus quadratis, ad quadratum GB. Quare, & vt linea DF, ad lineam H, sic latus FG, ad latus GB. Sed vt FG, ad GB, sic (sumpta communi altitudine GK,) rectan-

rectangulum F G K, ad rectangulum B G k; & vt rectangulum F G k; ad rectangulum B G K, sic superficies coni G F L, ad superficiē coni G B L, ex Archimede sępe citato. Ergo, & vt D F, ad H, sic superficies coni G F L, ad superficiem coni G B L. Quod erat faciendum.

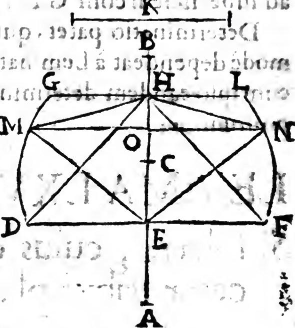
Determinatio patet, quia cùm hoc problema omnimodè dependeat à Lemmate antecedenti, debet sortiri cum ipso eandem determinationem. Quare patet propositum.

LEMMA LXVI. PROP. CXIV.

Si sphæra, cuius diameter B A, secetur tribus planis G H L, M O N, & D E F, parallelis, quibus diameter A B, sit normalis, & in segmento intermedio G D F L, inscribatur rhombus H M E N. Dico, quod secta H E, bifariam in C, segmentum G D F L, erit ad rhombum H M E N, vt tria rectangula sub A E, in C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B.

Nam

NAM super basim DEF, & circa axim segmenti intermedij HE, facto cono DHF, segmentum ad rhombum de foris sumpto cono, habet rationem compositam ex ratione segmenti GDFL, ad conum DHF, & ex ratione coni DHF, ad rhombū HMEN. Sed segmentum GDFL, est ad conum DHF, ex Caualerio supra citato, vt tria rectangula sub AE, in CB, cū tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AEB; conus verò DHF, ad rhombum HMEN, quia sunt circa eundem axim HE, est, vt basis ad basim, nempe, vt quadratum DE, ad quadratum MO, seu vt rectangulum AEB, ad rectangulum AOB. Ergo ex æquali, segmentum GDFL, ad rhombum GMEN, erit vt tria rectangula AE, CB, cum tribus rectangulis CHB, & cum duobus quadratis CE, ad rectangulum AOB. Quod &c.



SCHOLIVM.

NON diuerso modo probaremus, segmentum GDFL, esse ad rhombum HMEN, vt tria rectangula BH, CA, cum tribus rectangulis CEA, &

cum

cum duobus quadratis C H, seù C E, ad rectangulum B O A. Quare, cum rectangulum A O B, sit idem, ad quod ista plana habent eandem determinationem, patet esse æqualia, nempe tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum duobus quadratis C E esse æqualia tribus rectangulis B H, C A, tribus rectangulis C E A, & duobus quadratis C E, vel C H. Quibus hinc inde ablatis, & subtriplatis omnibus; vnũ rectangulum sub A E, in C B, cum vno rectangulo C H B, erit æquale vno rectangulo B H, C A, & vno rectangulo C E A. Vnde ex dictis habemus, quod si quædam recta linea B A, secetur in duobus punctis E, H, & rursùm segmentum intermedium H E, secetur bifariam in G; rectangulum A E, C B, cum rectãgulo C H B, erit æquale rectangulo B H, C A, cum rectangulo C E A. Quod etiam patet facilius, quia hæc rectangula sunt eadem plana, sed diuersimode denominata. Nam rectangulum sub A E, & B H, est idem cum rectangulo sub B H, E A; rectangulum verò sub A E, C H, est æquale rectangulo C E A; ergo duo rectangula sub A E, B H, & sub A E, C H, nempe rectangulum sub A E, C B, erit æquale rectangulo sub B H, E A, & rectangulo C E A. Et communi addito rectangulo C H B, cui est æquale rectangulum sub B H, C E. Ergo rectangulum sub A E, C B, cum rectangulo C H B, erit æquale rectangulo B H, E A; rectangulo C E A, & rectangulo B H, C E. Sed rectangulum B H, E A, cum rectangulo B H, C E, facit rectangulum B H, C A. Quare patet propositum.

Vnde

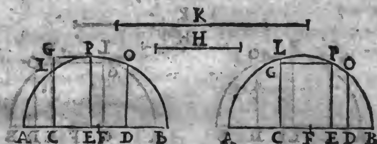
Vnde habemus ex dictis, quod si proponatur, vt proponetur in Lemmate sequenti. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis F, H; rursùm secare in O, inter E, H, vt diuisa H E, bifariam in C, rectangulum sub A F, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, sit ad rectangulum A O B, in data proportione; etiam si fiat in data proportione ex alia parte rectangulum sub B H, in C A, cum rectangulo C E A, & cum sexta parte quadrati H E, ad idem rectangulum B O A; tamen habebimus intentum.

LEM. LVII. PROP. CV.

Datam rectam AB, sectam in punctis C, & D; rursùm diuidere in E, inter C, D, vt diuisa CD, bifariam in F, rectangulum sub A C, in F B, vna cum rectãgulo FDB, & cum sexta parte quadrati CD, sit ad rectangulum A E B, in data proportione.

HOC Lemma potest habere duplicem casum; nam vel A C, D B, sunt æquales, vel inæquales. Si sint æquales, patet, quod proportio data debet esse talis conditionis, vt semper sit minor ea, quam habet rectan-

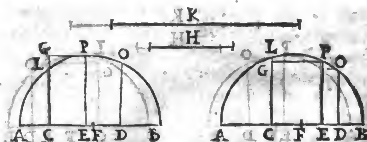
rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B, & cum ſexta parte quadrati C D, ad alterum rectangulorum A C B, A D B. Quod patet, quia in quocumque puncto E, ſecetur C D, ſemper rectangulum A E B, erit maius rectangulo A C B, vel A D B: Debet tamen proportio data adeò eſſe minor, vt ſupra expoſitum eſt, vt tamen non ſit minor ea, quam habent prædicta illa plana, ad quartam partem quadrati A B; quia rectangulum æquale quartæ parti quadrati A B; eſt maximũ



omnium, vt conſideranti patet. Si verò A C, D B, ſint inæquales; oportet, quod proportio data ſit minor ea, quam habent prædicta plana ad rectangulum ſub minori illatum A C, D B, in reliquam totius A B. Debet tamen taliter eſſe minor, vt non ſit minor ea, quam habent prædicta plana, ad quartam partem quadrati A B.

Data ergo ratio ſit, quam habet A B, ad H, & ſuper A B, fiat ſemicirculus, & exponatur linea K, potens ſimul rectangulum ſub A C, in F B, cum rectangulo F D B; & cum ſexta parte quadrati C D, & fiat vt A B, ad H, ſic quadratum K, ad quadratum alterius lineæ,

quæ ex determinationibus supra expositis, erit non maior medietate A B, sed semper maior, lineis C L, D O, erectis normaliter super A B, à punctis C, D, in prima figura; & in secunda figura, semper erit maior O D, supponendo D B, esse minorem A C, sed potest esse aliquando maior, aliquando æqualis, & aliquando minor ipsa C L, & hoc secundum diuersas determinationes, & habitudines lineæ A C, ad totam A B, vt consideranti patet; semper tamen erit non maior medietate



Sit ergo hæc alia C G, & per punctum G, ducatur G P, parallela A B, quæ semper occurret, ex determinationibus supra positis, circumferentiæ inter puncta L, O. Occurrat ergo vt in P, & à P, dimissa perpendiculari P E. Dico punctum E, esse quæsitum.

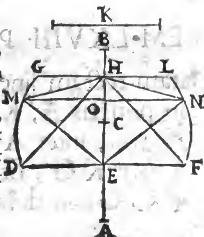
Cùm enim factum sit, vt A B, ad H, sic quadratum K, ad quadratum C G, nempe ad quadratum P E; & cum quadrato k, sint æqualia rectangulum A C, F B, rectangulum F D B, cum sexta parte quadrati C D; & pariter cum quadrato P E, sit æquale rectangulum A E B. Ergo, & vt A B, ad H; sic illa plana ad rectangulum A E B. Quod erat faciendum.

PRO-

PROBL. II. PROP. CXVI.

In dato segmento intermedio inscribere rhombum, vt segmentum sit ad rhombum, in data proportione.

DAtum segmentum intermedium sit G D F L, in quo inscribendus sit rhombus &c. Data ratio sit, quam habet A B, ad k. Et secta E H, axis segmenti bifariam in C, diameter A B, sphæræ taliter diuidatur in O, vt rectangulum sub A E, C B, cum rect. angulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H sit ad rectangulum AOB, vt tertia pars A B, ad k, per antecedens Lemma. Et per punctum O, agatur planum M O N, prioribus parallelum, & super ipsũ fiat rhõbus H M E N. Quem dico esse quæsitum.



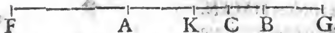
Sed antequam procedamus ad demonstrationem, sciendum est; quod cum præsens Problema dependeat ab antecedenti Lemmate, vt patet, & vt magis patebit,

debet cum ipso sortiri easdem determinationes, quas repetere est superuacaneum.

Quoniam enim, vt tertia pars A B, ad K, sic rectangulum A E, C B, cum rectangulo C H B, & cum sexta parte quadrati E H, ad rectangulum A O B. Ergo, & vt antecedentium tripla; nempe vt A B, ad K, sic tria rectangula A E, C B, cum tribus rectangulis C H B, & cum tribus sextis partibus quadrati E H, nempe cum dimidio quadrati E H, seù cum duobus quadratis C E, ad rectangulum A O B. Sed & vt illa plana, ad rectangulum A O B, sic segmentum G D F L, ad rhombum H M E N, ex Propositio. 114. Quare patet propositum.

LEM·LXVIII· PROP·CXVII·

Datam rectam lineam F G, sectam in punctis A, K, B, rursum secare in C, inter A, B, vt rectangulum F K G, sit ad rectangulum F C G, in data proportione.



HOc Lemma in aliter non difert à Propos. 115. nisi in hoc, quod terminus antecedens proportionis est diuersum, sed consequens est idem, nempe rectangulum.

gulum ortum ex sectione lineæ F G, inter A, B. Quare recipit etiam cum ipso eandem determinationem, & eandem explicatioaem, vt consideranti patet. Quare non est amplius immorandum. Solum meminendum est, pro huius solutione, posse adhiberi, circulum Parabolam, & Ellipsim, vt dictum est supra in Scholio proposit. 97.

PROBL. L. PROP. CXVIII.

In dato segmento intermedio sphæræ inscripto rhombo, inscribere alium rhombum, vt rhombus inscriptus, sit ad rhombum, qui inscribetur, in data proportione.

HOc Problema dependet ab antecedenti Lemmate, & omnia ab explicatis in simili proposito; quare ex superioribus, facilè patet eius constructio, & demonstratio.

SCHOLIVM.

HIc esset soluendum Problema. In dato segmento intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conorum rhombi sint in data proportione, sed quia hoc

hoc Problema est quodam particulare contentum sub vniuersali, quod statim proponetur, ideò omittitur.

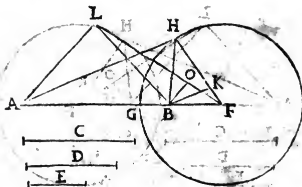
LEM. LXIX. PROP. CXIX.

Inuenire circulum secantem datam rectam lineam magnitudine, & positione, taliter; vt ab extremitatibus datæ lineæ inflexis lineis, quæ vniantur in quolibet puncto circumferētiæ inuenti circuli, semper retineant imperatam rationē. Inflexis autem talibus lineis, & vnitis extra periphæriam, impossibile sit retinere eandem rationem.

HOC Lemma, vel per modum Problematis, vel per modum Theorematis, solutum fuit à diuersis. Nempe, ab Eutocio initio Comentariorum super Apollonium Pergęum. Postea aliqualiter à Bartholomæo Souero lib. 3 de recti, ac curui proportione, ni fallor. Deinde à Galileo in postremis Dialogis pagina, apud nos 45. Tandē à P. Bonauentura Cauallerio exercitatione 6. Propos. 33. Et forsitan ab alijs, quos non vidimus. Soluemus ipsum, & nos, quamuis construc-

tione,

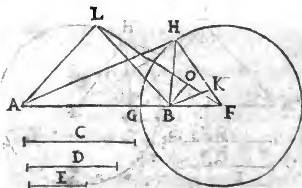
tione, & demonstratione partim diuersa à tradita ab Eutorio, præcipuè cum ipsa vtamur in solutione Problematum alicuius considerationis.



Data ergo recta linea sit A B, & data proportio sit, quam habet C, ad D. Oportet inuenire circulum secantem A B, in puncto v.g. G, vt ab extremitatibus A, B, inflexis lineis A H, H B, ad quodlibet punctum circumferentiæ, semper A H, ad H B, sit vt C, ad D.

Si data proportio sit æqualitatis, Lemma, vt proponitur, nequit solui; quia, vt ibidem ait Galileus, hoc admirabile tunc accidit, quòd circulus degeneret in rectã lineam indefinitam, perpendiculariter erectam super datam rectam lineam A B, à puncto eius medio. Nam ab extremitatibus A, B, inflexis lineis ad quodlibet punctũ illius perpendicularis, semper hæ retinebunt proportionem æqualitatis, quia semper constituent triangulum æquicrure. Si verò proportio data sit inæqualitatis, semper Lemma potest construi; & eius constructio talis erit.

erit. Data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum minorem; hoc est si C, sit maior D, fiat vt C, ad D, sic D, ad E; & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B,



ad B F, ipsi productam in directum; & inter A F, F B, inueniatur media proportionalis, quæ sit F G. Tunc, centro F, interuallo F G, describatur circulus. Dico hunc esse quæsitum, nimirum, quod si in periphæria ipsius sumatur quodlibet punctum H, & vniantur in ipso A H, B H, quod semper A H, ad H B, erit vt C, ad D. Ducatur per punctum B, linea B K, parallela H A. Quoniam enim F G, est media proportionalis, per constructionem, inter A F, F B: Ergo vt A F, ad F G, seu ad F H, sic F G, seu F H, ad F B. Quare habemus duo triangula, nempe A F H, H F B quæ circa communem angulum F, habent latera proportionalia. Ergo sunt similia. Ergo angulus F H B, erit æqualis angulo H A F. Sed propter parallelas A H, B K, etiam angulus A H B, est æqualis alterno H B K. Ergo etiam duo triangula

AHB,

A H B, H B K, erunt ſimilia. Ergo vt A H, ad H B, ſic H B, ad *B* K. Et vt quadratum A H, ad quadratũ H B, ſic A H, ad B K. Sed vt A H, ad B K, ſic (ob parallelas A H, *B* K,) A F, ad F B, vt autem A F, ad F B, ſic C, ad F, (quia cum ſupra factum ſit, vt exceſſus C, ſuper E, ad *E*, ſic A B, ad B F.) Ergo, & vt C, ad E, ſeu, vt quadratum C ad quadratum D, ſic erit quadratum A H, ad quadratum H B. Ergo, & vt C, ad D, ſic A H, ad H B. Quod erat oſtendendum.

Quòd verò extra circumferentiam circuli inuenti nõ ſit reperibile aliud punctum, vt ad illud inflexis lineis à punctis A, B, inflexæ habeant proportionem C, ad D, patet. Nam, ſit tale punctum, ſi datur, L, vel intra, vel extra circulum; & ſint ductæ L A, L B, L F; & per punctum B, ſit ducta B O, parallela A L. Quoniam, per hypotheſim, vt C, ad D, ſic A L, ad L *B*. Ergo & vt quadratum L A, ad quadratum L B, ſic quadratum C, ad D, quadratum, nempe ſic C ad E. Sed vt C, ad E, ſic, ex præoſtenſis A F, ad F B, & ob parallelas B O, L A, vt A F, ad F *B*, ſic A L, ad *B* O. Ergo, & vt quadratum L A, ad quadratum L *B*, ſic A L, ad *B* O. Ergo tres A L, L B, *B* O, ſunt continue proportionales. Cùm verò angulus A L *B*, ſit æqualis alterno L *B* O. Ergo triangula A L *B*, L *B* O, erunt ſimilia. Vnde angulus L A *B*, erit æqualis angulo *B* L O. Cùm verò angulus ad F, ſit cõmunis duobus triangulis A F L, L F *B*. Ergo hæc duo triangula cùm ſint æquiangula, erunt ſimilia. Vnde erit vt A F, ad F L, ſic F L, ad F B. Quare F L, erit media proportionalis inter A F, F B. Sed etiam F H, eſt me-

dia proportionalis inter easdẽ duas A F, F B. Ergo duæ F L, & F H, erunt æquales. Quod implicat, siue punctum L, sumatur extra, vt in schemate, siue intra circulũ. Quare patet propositum.

ROBL. LI. PROP. CXX.

In dato quolibet solido rotundo orto ex reuolutione circa axim; siue in dato quolibet eius segmento, seù ad verticem, seù intermedio, inscribere rhombum, vt superficies conicæ conorum rhombi, sint in data proportione.

SIT solidum quodlibet rotundum, vel sphæra, vel sphæroides, vel solidum cycloidale, vel quodlibet aliud ortum ex reuolutione circa axim, &c., inclusum à curua tantùm superficie, quod nobis repræsentatur in prima figura. Vel quælibet portio sphæræ, vel sphæroidis, vel quodlibet conoides, vel conus, vt in secunda; vel quodlibet segmentum intermedium prædictorum solidorum, vt in tertia, & omnium solidorũ sit axis A B, oportet facere, quod imperatum est &c.

Data proportio sit, quam habet C, ad D; quæ si sit æqualitatis, erubescimus verba profundere, cùm res etiã cæcu-

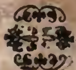
cæcutientibus sit splendidissima. Si verò proportio data sit inæqualitatis, vel est excessus, vel defectus; si est excessus, & data ratio C, ad D, continuetur ad tertium terminum E, & fiat vt excessus C, super E, ad E, sic A B, ad B F, positam sibi in in directum, & inter A F, F B, inuenta media F G, centro F, interuallo F G, describatur portio circuli secans superficiem dati solidi in H; (in prima enim, & secunda figura semper secabit; in tertia verò nō semper, sed quando non secat, Problema est insolubile, vt patebit inferius,) & per punctum H, ducatur planū H L K, perpendiculare axi A B; & supra HLK, inscribatur rhōbus A H B K. Dico hunc esse quæsitum.

Nam, per antecedē-

tem Propositionem, est, vt C, ad D, sic A H, ad H B. Sed vt A H, ad H B, sic (sumpta communi altitudine HL,) rectangulum A H L, ad rectangulum B H L, vt autem rectangulũ A H L, ad rectangulum B H L, sic ex Archimede, superficies coni H A K, ad superficiẽ coni B H K. Ergo, & vt C, ad D, sic superficies coni A H K, ad superficiem coni H B K. Quod erat faciendum.

Quòd verò, quando in tertia figura, circulus non secat superficiem, Problema sit insolubile; patet, quia, ex secunda parte Propos. antec. extra periphæriam circuli, non datur punctum, ad quod ductæ A H, H B, sint in proportione C, ad D.

Si verò proportio data sit defectus, tunc fieret vt D, maior ad C, minorem, sic C, ad E, & producta B A, ad partes A, fierent reliqua, vt supra. Sed tunc circulus ductus non semper secaret superficiem secundæ figuræ. At quando non secaret, Problema esset inconstruibile. Res est clara ex præcedentibus. Quare ad alia transeamus.

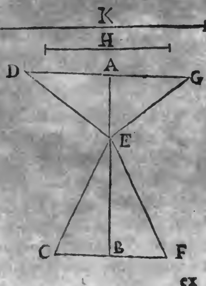


PRO-

PROBL. LII. PROP. CXXI.

Data recta linea A B, à cuius extremitatibus A, B, ſint erectæ perpendiculares A D, B C, quæ pariter ſint datæ; reperire in A B, punctum E, vt iunctis E D, E C, & triangulis D E A, C E B, reuolutis circa A B; coni C E F, D E G, orti, ex tali reuolutione, ſint in data proportione.

Data proportio ſit, quam habet B A, ad H, & fiat vt quadratũ C B, ad quadratum D A, ſic B A, ad K, & B A, diuidatur in E, vt ſit, ſicut K, ad H, ſic B E, ad E A, & ductis E D, E C, intelligantur coni E C F, D E G. Quos dico eſſe quæſitos. Nam, ex propoſit. 1. proportio coni C E F, ad conum D E G, componitur



ex

ex proportione quadrati C B, ad quadratum D A, & ex proportione B E, ad E A. Sed vt quadratum B C, ad quadratum D A, sic B A, ad K; & vt B E, ad E A, sic K, ad H. Ergo proportio coni C E F, ad conum D E G, componetur quoque ex proportione B A, ad K, & K, ad H. Sed istæ duæ proportiones componunt quoque rationem B A, ad H. Ergo vt B A, ad H, sic conus C E F, ad conum D E G. Quod erat faciendum.

LEM. LXX. PROP. CXXII.

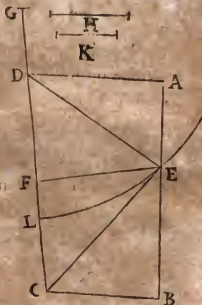
Data recta A B, & ab eius extremitatibus erectis normalibus B C, A D, quæ pariter sint datæ; reperire inter A, B, punctum E, vt ductis rectis lineis C E, D E, sint in data ratione possibili.

Data ratio sit, quam habet C B, ad H, quæ vel est æqualitatis, vel excessus, vel defectus. Si sit æqualitatis. Ducatur D C, & diuidatur bifariam in F, & à puncto F, super D C, erigatur normalis F E, quæ occurret A B, vel inter A, B, vt in E, vel in aliquo punctorum B, vel A; vel extra B A, vel ad partes A, vel ad partes B. Vbicumque occurrat, semper istud punctum erit quæsitum, nempe si ducantur ad illud punctum lineæ

neæ

neæ à punctis D, C, istæ semper erunt æquales. Sed quando occurrit, vel in punctis A, B, vel extra ipsa, Lemma non est solubile, vt proponitur. Quando verò occurrit intra, vt in E, ductis D E, C E, patet ipsas esse æquales. Nam cum duæ D F, F E, sint æquales duabus E F, F C, & anguli D F E, E F C, sint recti. Ergo basis D E, erit æqualis basi C E.

Si verò ratio data sit excessus, fiat vt C B, ad H, sic H, ad K, & producatur C D, in G, vt sit sicut C B, ad K, sic C G, ad G D, & inter C G, G D, inueniatur media G L, & centro G, interuallo G L, describatur circulus occurrens A B, inter A, B, in puncto E. Dico punctum E, esse quæsitum.



Ducantur C E, D E. Ergo per ea, quæ habita sunt prop. 119. vt C B, ad K, seù vt quadratum C B, ad quadratum H, seù vt quadratum C G, ad quadratum G L, sic quadratum C E, ad quadratum E D. Quare, & vt C B, ad H, sic C E, ad E D.

Si verò circulus non occurreret *B* A, inter *B*, A, Lemma vt proponitur esset insolubile, vt patet ex secunda parte eiusdem propos. 119. quia extra circumferentiam

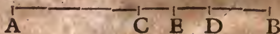
inuenti

inuenti circuli non est reperibile punctum, ad quod inflexæ lineæ retineant imperatam proportionem.

Si verò proportio C B, ad H, sit defectus; fiat pariter, vt C B, ad H, sic H, ad K; sed D C, producatur vt factũ est prius, sed ex parte C, & fiant reliqua, vt prius. Nam eodem discursu concludemus conuertendo propositum. Factum est ergo, quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

EX hoc Lemmate habemus modum, quo soluamus alias duas propositiones, quæ sub Lemmate continentur, tamquam particularia sub generali.



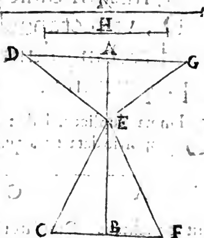
Primum est. Datam rectam v. g. A B, sectam in punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt duo quadrata A C, C E, sint ad duo quadrata B D, D E, in data proportione. Nam si intelligamus A C, D B, elleuari supra C D, perpendiculariter, & inueniamus punctum E, vt ductis A E, B E, sint in subduplicata ratione proportionis datæ, punctum E, erit quæsitum.

Secundum est. Datam rectam A B, sectam in duobus punctis C, D, rursùm diuidere C D, in E, vt rectangulum A C B, cum quadrato C E, sit ad rectangulum A D B, cum quadrato D E, in data proportione. Nam si à punctis C, D, intelligamus erectas perpendiculariter medias proportionales inter A C, C B; & inter A D, D B.

DB. Et in CD, inueniamus punctum E, vt ductis lineis ab extremitatibus normalium ad punctum E, quæ sint in subduplicata ratione data, factum erit, quod proponebatur, vt consideranti patet.

PROBL. LIII. PROP. CXXIII.

Datis iisdem, quæ in superiori Problemate, facere eadem, quæ ibidem, vt superficies conicæ conorum, sint in data proportione.



Data proportio sit, quam habet BA, ad H, & fiat vt CB, ad DA, sic BA, ad K, & inter puncta B, A, inueniatur punctum E, vt ductis CE, DE, sit vt K, ad H, sic CE, ad ED, per propositionem antecedetem, & ex triãgulis EBC EAD, reuolutis circa AB, fiant coni CEF, DEG. Dico hos esse quæsitos. Nam BA, ad H, habet rationem compositam ex ratione AB, ad K, & ex ratione K, ad

H, sed

H, sed vt A B, ad K, sic facta est C B, ad D A, & vt K, ad H, sic C E, ad E D. Ergo ratio B A, ad H, componetur ex rationibus C B, ad D A, & C E, ad E D. Sed istæ duæ rationes componunt quoque rationem rectanguli E C B, ad rectangulũ E D A. & vt rectãgulũ E C B, ad rectangulũ E D A, sic superficies conica coni E C F, ad superficiem conicam coni E D G. Quare, & vt B A, ad H, sic superficies conica coni C E F, ad superficiem conicam coni E D G. Quod erat faciendum.

LEM. LXXI. PROP. CXXIV.

Datam rectam lineam A B, sectam vtcumque in duobus punctis C, D, rursum diuidere in E, inter C, D, vt rectangulum A E C, sit ad rectangulum B E D, in data proportione.

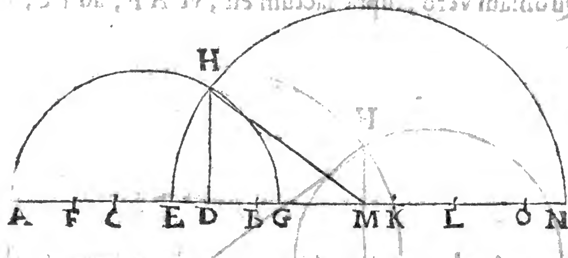
Lemma duplicem habet casum, secundùm quod proportio data est æqualitatis, vel inæqualitatis.



Si sit æqualitatis. Diuidatur D C, in E, vt sit sicut A D, ad C B, sic D E, ad E C. Dico punctum E, esse quæsitum. Quoniam enim, vt tota A D, ad totam C B, sic ablata

ablata D E, ad ablatam E C; ergo & reliqua A E, erit ad reliquam E B, vt tota ad totam, ſeù vt ablata D E, ad ablatam E C. Ergo rectangulum A E C, erit æquale rectangulo B E D.

SI verò proportio data ſit inæqualitatis, determinetur rectangulum, quod debet eſſe maior terminus datæ proportionis, & ſit hoc rectangulum A E C. Data ra-



tio ſit, quam habet A C, ad G F, & fiat, vt A F, ad F C, ſic C D, ad D G, & ſuper A G, fiat ſemicirculus, & à puncto D, erigatur ſuper A G, normalis D H. Sumatur autem ipſius D G, dupla D K; & pariter fiat vt A F, ad F C, ſic A C, ad K L, ipſi A K, poſitam in directum, & tandem fiat vt A F, ad A C, ſic D B ad L O, itidem A L, poſitam in directum; & ſecta D O, bifariam in M & iuncta M H, centro M, interuallo M H, fiat ſemicirculus, qui vtique ſecabit C D, inter C, D, vt poſtea oſtendetur; ſecet igitur eam in puncto E. Dico punctum E, eſſe quæſitum. Quoniam enim rectangula A D G, N D F, ſunt æqualia, quia ambo æqualia eidem quadrato D H,

& pariter rectangulo N D E, est æquale rectangulum O E D, quia N O, vt facilè patet, est æqualis ipsi D E, & O E, est æqualis ipsi N D. Ergo rectangulum A D G, erit æquale rectangulo O E D. Ergo vt A D, ad E O, sic E D, ad D G. Sed vt A D, ad E O, sic (sumpta communi altitudine A F,) rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo, & vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Quoniam verò, supra factum est, vt A F, ad F C, sic

H

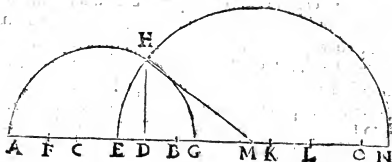
A F C E D B G M K L O N

C D, ad D G. Ergo, & permutando, vt A F, ad C D, sic F C, ad D G. Et conuertendo vt C D, ad A F, sic D G, ad F C. Sed vt C D, ad A F, sic (sumpta communi altitudine A D,) rectangulum A D C ad rectangulum D A F. Ergo, & vt D G, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum D A F. Sed quoque supra probatum est, vt E D, ad D G, sic rectangulum D A F, ad rectangulum sub O E, in A F. Ergo ex æquali, & in perturbata analogia, vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub O E, in A F. Sed rectangulum

gulum sub O E, in A F, diuiditur in rectangulum sub D E, in A F, in rectangulum sub D K, in A F, in rectangulum sub K L, in A F, & in rectangulum sub L O, in A F. Ergo & vt E D, ad F C, sic rectangulum A D C, ad rectangulum sub D E, in A F, cum rectangulis sub D K, in A F, sub K L, in A F, & sub L O, in A F. Sed rectangulum sub D K, in A F, est æquale duplo rectangulo F C D, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic C D, ad D G vel dupla C D, ad duplam D G, quæ est ipsa D K. Et pariter rectangulum sub A F in K L, est æquale rectangulo A C F, quia supra factum est, vt A F, ad F C, sic A C, ad K L. Et tandem rectangulum sub L O, in A F, est æquale rectangulo sub A C, in D B quia pariter supra factũ est, vt A F, ad A C, sic D B ad L O. Ergo & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, ad quinque rectangula, nempe ad rectangulum sub D F, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangulo sub A C, in D B. Quod seruetur.

Rursùm, quoniam vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine D E) quadratum E D, ad rectangulum sub E D, in F C. Ergo, & vt D E ad F C, tàm est rectangulum A D C, ad illá quinque rectangula, quàm quadratum D E, ad rectangulum sub D E, in F C. Ergo & vt D E, ad F C, sic ambo antecedentia ad ambo consequentia, nempe rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad sex rectangula, nempe ad rectangulum sub E D, in F C, cum rectangulo sub E D, in A F, cum duobus rectangulis F C D, cum rectangulo A C F, & cum rectangu-

tangulo sub A C, in D B. Sed rectangula sub D E, in F C, & sub D E, in A F, faciunt rectangulum sub D E, in C A. Et pariter rectangulum sub A C, in D B, cum rectangulo sub A C, in E D, facit rectangulum sub A C, in E B. Ergo, & vt D E, ad F C, sic rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F.



Tandem vt D E, ad F C, sic (sumpta communi altitudine composita ex A C, & ex dupla C D,) rectangulum sub E D, in talem compositam, nempe rectangulũ sub A C, in E D, cum duobus rectangulis C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis D C F: Quare, & vt rectangulum A D C, cum quadrato D E, ad rectangulum sub A C, in E B, cum duobus rectangulis F C D, & cum rectangulo A C F, sic rectangulum sub A C, in E D, cum duplo rectangulo C D E, ad rectangulum A C F, cum duobus rectangulis F C D. Cùm ergo sit, vt totum ad totum, ita ablatum ad ablatum: Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totum, siue

siue vt D E, ad F C. Quare & vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato E D, super rectangulum A C, E D, & super duo rectangula C D E, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, super rectangulum sub A C, in E D, & super duo rectangula C D E, est rectangulum A E C. Quia rectangulum A D C, diuiditur in rectangulum A C D, & in quadratum C D; duo autem quadrata C D, D E, excedunt duo rectágula C D E, quadrato C E, & rectangulum A C D, excedit rectangulum A C, E D, rectangulo A C E, quod cum quadrato C E, facit rectangulum A E C. Ergo, & vt D E, ad F C, sic rectangulum A E C, ad rectangulum sub A C, in E B. Sed vt A C, ad E D, sic rectangulnm sub A C, in E B, ad rectangulum B E D. Ergo ex æquali in perturbata analogia, vt A C, ad C F, sic rectangulum A E C, ad rectangulum B E D. Quod erat &c.

Quòd verò assumptum est supra, nempe punctum E, cadere inter C, D; patet. Nam, si non cadit inter C, D, cadet vel in C, vel vltra C. Non in C, quia eodem progressu, demonstrabitur esse, vt D E, ad F C, sic excessus rectanguli A D C, cum quadrato D E, seù ex hypothesi, cum quadrato D C, super rectangulum A C D, & super duo rectangula C D E, nempe super duo quadrata C D, qui excessus esset in tali casu nihil, ad rectangulum sub A C, in C B, nempe ad rectangulum A C B. Quod implicat. Et multum maius absurdum concluderetur, si punctum E, caderet vltra C; quia tunc minus nihilo, esset ad rectangulum positiuum, vt E D, ad F C.

LEM-

LEM. LXXII. PROP. CXXV.

Datis duobus ſemicirculis extra ſe poſitis, nec ſe contingentibus, quorum diametri ſint ſibi in directum, reperire in linea intermedia inter duos ſemicirculos punctum, à quo ductis tangentibus ſemicirculos, iſtæ ſint ad inuicem, in data proportione.

Dati duo ſemicirculi ſint, quorum diametri B D, C A, ſint vna linea continuata, & D C, ſit linea extra ſemicirculos, & inter ipſos intercepta. Oportet autem facere, quod imperatum eſt. Data proportio ſit, quam habet A C, ad H, & fiat vt A C, ad H, ſic H, ad P; deinde per Lemma antecedens, in C D, inueniatur punctum E, vt rectangulum A E C, ſit ad rectangulum B E D, vt A C, ad P,

&

& à puncto E, ducantur tangentes E F, E G. Quas assero esse quæsitas. Nam, quoniam vt A C, ad P, tàm est quadratum A C, ad quadratum H, quàm rectangulum A E C, ad rectangulum B E D, & rectangulis A E C, & B E D, sunt æqualia quadrata tangentium E G, E F, alterum alteri. Ergo, & vt quadratum A C, ad quadratum H, sic quadratum E G, ad quadratum E F. Quare, & vt A C, ad H, sic E G, ad E F. Quod erat faciendum.

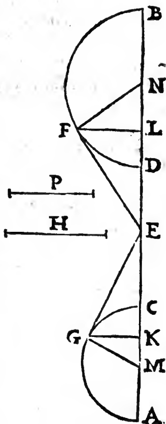
PROBL. LIV. PROP. CXXVI.

Datis iisdem, quæ in superiori Lemmate, inuenire in C D, punctum E, vt ductis tangentibus E F, E G, & à centris M, & N, semicirculorum ductis M G, & N F, duo triangula rectangula M G E, N F E, sint in data proportione.

Quod triangula M G E, & N F E, sint rectangula, patet ob tangentes, & semidiametros. Data ergo proportio sit, quam habet A M, ad H, & in C D, inueniatur punctum E, inter C, D, vt ductis tangentibus E G, E F, tangens G E, sit ad tangentem F E, vt N D, ad H, & iungantur F N, G M. Dico trian-

 gula

gula M G E, N F E; esse quæsita. Dimittantur à punctis G, F, perpendiculares G K, F L. Tunc arguitur sic. Proportio A M, ad H, cōponitur ex proportione A M, ad N D, seù M G, ad N F, & ex proportione ND, ad H, hoc est, ex factis, ex proportione G E, ad E F. Sed hæ duæ proportiones componunt etiam proportionẽ rectanguli MGE, ad rectangulum N F E. Ergo & vt A M, ad H, sic rectangulum M G E, ad rectangulum N F E. Sed propter similitudinem triangulorum rectangulorum E G M, G M K, rectangulum M G E, est æquale rectangulo sub E M, in K G, & pariter propter eandẽ rationem similitudinis, rectāgulū E F N, est æquale rectāgulo sub N E, in F L. Ergo, & vt A M, ad H, sic rectangulum sub E M, in K G, ad rectangulum sub N E, in F L.



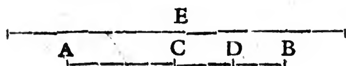
Ergo, & horum rectangulorum dimidia, nempe triangula E G M, E F N. Ergo, & vt A M, ad H, sic triangulum E G M, ad triangulum N F E. Quod erat faciendum.

LEM-

LEM. LXXIII. PROP. CXXVII.

Datam A B, sectam in C, rursùm diuidere in D, inter C, B, vt rectangulum A B, C D, sit ad rectangulum AD, CB, in data proportione.

PAtet proportionem datam oportere esse defectus, quia rectangulum A B, C *D*, minus est rectangulo A *D*, C *B*, vt facile patebit consideranti. Proportio ergo data sit ea, quam habet A B, ad E, & fiat vt excessus *E*, super C B, ad C *B*, sic A C, ad C *D*. Patet punctum *D*, cadere inter C, B, quia non solum *E*, est maior A C, sed etiam A B. *D*ico punctum *D*, esse quæsitum. Quoniam enim factum est, vt excessus *E*, super

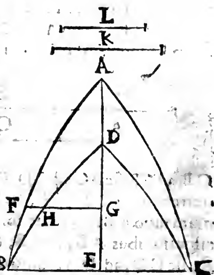


C B, ad CB, sic AC, ad C D. Ergo, & cõponendo, & conuertendo, vt C B, ad *E*, sic C D, ad D A. Tunc, quoniam ratio A B, ad E, de foris sumpta C B, composita est rationibus A B, ad C B, & C *B*, ad *E*, & vt C B, ad *E*, sic C D, ad D A. Ergo ratio A B, ad E, componetur ex rationibus A B, ad C B, & CD, ad D A. Sed

ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A B, C D, ad rectangulum A D, C B. Quare patet factum esse, quod proponebatur.

PROBL. LV. PROP. CXXVIII.

Datis duabus Parabolis ABC, DBC, in eadem basi B C, & circa eandem diametrum A E, inæqualis tamen altitudinis. Ducere FHG, ordinatim applicata, vt F G, ad G H, sit in data proportione.



Data proportio sit, quam habet BC, ad K, quæ continuetur ad tertium terminum L, & datam A E, diuisa in D, rursùm diuidatur in G, inter D, E, vt sit sicut L, ad B C, sic rectangulum A E, G D, ad rectangulũ A G, D E, per proposit. antecedẽtem, & per punctum G ordinatim applicetur G H F. Quam dico esse quæsitam. Quoniam enim quadratum F G, ad quadratum.

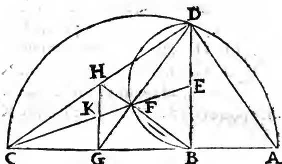
dratum G H, de foris sumpto quadrato B E, habet rationem compositam ex ratione quadrati F G, ad quadratum B E, & ex ratione quadrati B E, ad quadratum H G. At vt quadratum F G, ad quadratum B E, sic A G, ad A E; & vt quadratum B E, ad quadratum H G, sic E D, ad D G, ex primo Conic. proposit. 20. Ergo ratio quadrati F G, ad quadratum G H, componetur ex rationibus A G, ad A E, & D E, ad D G. Sed ex ijsdem rationibus componitur ratio rectanguli A G, D E, ad rectangulum A E, D G, & vt rectangulum A G, D E, ad rectangulum A E, D G, sic facta est conuertendo B C, ad L, nempe quadratum B C, ad quadratum K. Ergo, & vt quadratum B C, ad quadratum K, sic quadratum F G ad quadratum G H. Ergo, & vt B C, ad K, sic F G, ad G H. Quod erat faciendum.

LEM. LXXIV. PROP. CXXIX.

Datam rectam lineam taliter diuidere in puncto, vt rectangulum sub tota, & sub altero, segmentorum ad quadratum alterius segmenti, sit in data proportone.

HOC Lemma solutum est etiam propos. 20. sed ad vberiorem scientiam, soluetur etiam nunc aliter, quamuis prolixius. Sit ergo data recta linea C B, quæ taliter sit secanda in G, vt rectangulum B C G, sit ad qua-

quadratum G B, in data proportione. Data proportio ſit, quam habet C B, ad B A, ſibi poſitam in directum, & ſuper A C, fiat ſemicirculus, ac à puncto B, erigatur normalis B D, & ſuper diametrum D B, fiat ſemicirculus ad partes C, cuius centrum ſit E, & ducatur E C, ſecans circulum in F, & per puncta D F, ducatur D F G, occurrens B C, in G. Dico punctum G, eſſe quæſitum.



Ducatur D C, & per punctum G, agatur G H, parallela D *B*; & ducantur B F, F H. Quoniam D B, & H G, ſunt factæ parallelæ, & D *B*, ſecatur bifariam in E, à linea C E. Ergo & H G, ſecabitur ab eadem bifariam in K, & angulus F K G, erit æqualis angulo D E F. Sed & angulus D F E, eſt æqualis ſibi ad verticem K F G. Ergo triangulum D F E, erit æquiangulum, & ſimile triangulo K F G. Ergo, vt F D, ad D E, ſic F G, ad G K. Et ad conſequentium dupla. Ergo vt F D, ad D B, ſic F G, ad G H. Sed & angulus G D B, eſt æqualis ſibi alterno H G F. Ergo duo triangula D F B, H F G, ſunt ſimilia. Ergo angulus rectus D F B, eſt æqualis recto H F G.

Ergo

Ergo duæ lineæ BF, FH, sunt sibi in directum. Cùm autem triangulo DFB, sit simile triangulum DBG; & pariter triangulo HGF, sit simile triangulum HGB, quia omnia sunt rectangula, & bina habent vnum angulum communem. Ergo, & triangulum DBG, erit simile triangulo HGB. Quare vt DB, ad BG, ita BG, ad GH. Quare rectangulum sub DB, HG, erit æquale quadrato GB. Iungatur AD. Ergo triangulum DBA, est simile triangulo DBC; triangulo autem DBC, est simile triangulum HGC. Ergo vt DB, ad BA, sic HG, ad GC. Ergo rectangulum sub DB, in HG, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Sed rectangulum sub DB, in HG, ostensum est æquale quadrato GB. Ergo quadratum GB, erit æquale rectangulo sub CG, in BA. Ergo tres CG, GB, BA, sunt continue proportionales. Cùm autem sit, vt CG, ad GB, sic quadratum CG, ad rectangulum CGB. Ergo, & componendo, vt CB, ad BG, sic quadratum CG, cum rectangulo CGB, nempe rectangulum BCG, ad rectangulum CGB. Sed vt CG, ad GB, seu vt GB, ad BA, sic rectangulum CGB, ad quadratum GB. Ergo ex æquali vt CB, ad BA, sic rectangulum BCG, ad quadratum GB. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

Constructio præsentis Lemmatis potest inseruire pro solutione propositionis. Data vna extremarum in ordine trium continue proportionalium, & summa

ma mediæ, & alterius extremæ, diſtinguere ſingulas. Nam cùm probatum ſit C G, G B, & B A, eſſe tres continue proportionales. Ergo B A, eſt vna extremarum, & C B eſt compoſita ex altera extrema, & ex media.

LEM. LXXV PROP. CXXX.

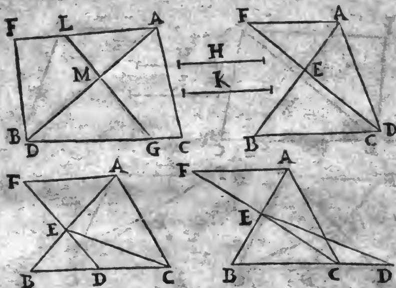
Dato triangulo ABC, & per punctum A, acta A F, indefinita, & parallela B C, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum D, & ducta D E F, triangulum externum F E A, ſit ad triangulum datum A B C, in data proportione.

QVatuor diuerſis modis poteſt dari punctum D, in linea B C. Nam vel poteſt cadere in ipſo B, vt in prima figura; vel in ipſo C, vt in ſecunda; vel inter B, C, vt in tertia; vel tandem vltra B C, vt in quarta. Si cadit in B, vt in prima, tunc res eſt facilis negotij. Nam data ratio ſit, quam habet B C, ad H. Et fiat vt H, ad B C, ita B C, ad F A, & ducatur F B. Dico triangulum F B A, eſſe quæſitum. Quod patet, quia cum duo triangula F B A, B A C, ſint inter eaſdem parallelas; ergo habebunt eandem altitudinem. Quare

erunt

erunt ad inuicem, vt bases. Ergo triangulum F B A, erit ad triangulum B A C, vt basis F A, ad basim B C, seu vt B C, ad H.

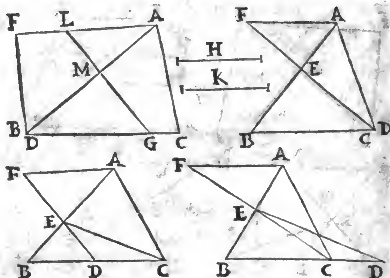
In alijs tribus casibus semper fiat, vt B C, ad B D, ita H, ad K, & per propos. antec. B A, taliter secetur in E, vt rectangulum A B E, sit ad quadratũ A E, vt K, ad B C,



& ducatur per puncta D E, linea DEF, occurrens AF, in F. (Occurret enim, quia F A, B C, sunt parallelæ.) Dico triangulum F A E, esse quæsitum. Ducatur E C. Triangulum F A E, ad triangulum A B C, habet rationem cõpositam, ex rationibus trianguli FAE, ad triangulum B E D; trianguli B E D, ad triangulum B E C; & trianguli B E C, ad triangulum A B C. Sed triangulũ F E A, ad triangulum B E D, (quia ob parallelas FA, BC, sunt similia,) est vt quadratum A E, ad quadratum E B; &

 trian-

triangulum B E D, eſt ad triangulum B E C, vt B D, ad B C; triangulum verò B E C, eſt ad triangulum BCA, vt B E, ad B A. Quare ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex ratione quadrati A E, ad quadratum E B, ſeù ex duplicata ratione A E, ad E B; & ex rationibus B D, ad B C; & B E, ad B A. Sed ex vna



ratione A E, ad E B, & ex ratione B F, ad BA, componitur ratio A E, ad B A, & vt B D, ad B C, ita eſt K, ad H Ergo ratio trianguli F A E, ad triangulum A B C, componetur quoque ex vna ratione A E, ad E B, ex ratione A E, ad A B, & ex ratione K, ad H. Sed ex rationibus A E, ad E B, & A E, ad A B, componitur ratio quadra- A E, ad rectangulum A B E; & vt quadratum A E, ad rectangulum A B E, ſic eſt B C, ad K, conuertendo per conſtructionem. Ergo & ratio trianguli F A E, ad triangulum

lum B A C, componetur ex rationibus B C, ad K, & K, ad H; nempe erit ad ipſum, vt B C, ad H. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

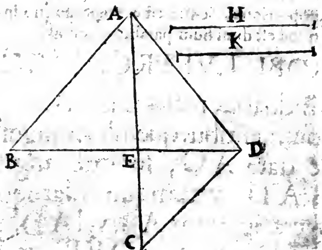
EX dictis habemus modum, quo ſoluamus hanc propoſitionem. Dato parallelogrammo F C, vt in prima figura, cuius diameter ſit B A, & dato in B C, etiam producta ad partes C, punctum G, ducere G M L, vt triangulum L M A, ſit ad parallelogrammum F C, in data proportione. Soluta eſt enim propoſitio in triangulo, quod eſt dimidium parallelogrammi.

PROBL. LVI. PROP. CXXXI.

Datis duabus rectis lineis B A, A D, continentibus quemlibet angulum, & data A C, ſecante angulum B A D, vtcumque; datoque in altera ipſarum A B, vel A D, puncto D. Ducere D E B, vt quadratum B E, ſit ad rectangulum B D E, in data proportione.

DAta proportio ſit, quam habet H, ad K, & per punctum datum D, agatur D C, parallela B A,

quæ vtique occurret A C, indefinite productæ, quia cum ipsa concurrit etiam ei parallela B A; occurrat in C, adeò vt fiat triangulum A C D; per proposit. ergo anteced., dato in C D, puncto D, ducatur D E B, occurrens A B, in B, vt triangulum A B E, sit ad triangulum A C D, vt H, ad K. Dico factum esse, quod proponebatur. Nam triangulum B E A, ad triangulum A C D, habet rationem compositam ex ratione trianguli B E A, ad triangulum A E D, & trianguli A E D, ad triangulum A C D. Ergo ratio quoque H, ad K, com-



ponetur ex istis rationibus. Sed vt triangulum BAE, ad triangulum A E D, sic est B E, ad E D; & vt triangulum E A D, ad triangulum A D C, sic est A E, ad A C. Sed ob parallelas B A, C D, vt A E, ad A C, sic B E, ad B D. Ergo ratio quoque H, ad K, componetur ex ratione BE,

ad

ad E D, & ex ratione B E, ad B D. ſed iſtæ duæ rationes componunt quoque rationem quadrati B E, ad rectangulum B D E. Ergo erit vt H, ad K, ſic quadratum B E, ad rectangulum B D E. Quod erat faciendum.

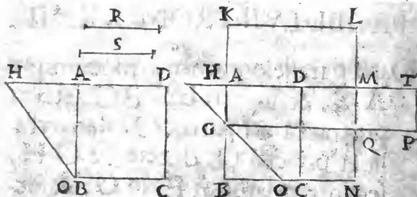
PROBL. LVII. PROP. CXXXII.

Dato parallelogrammo quocumque A C, & in eius baſi B C, etiam protracta ad partes C, dato vbilibet puncto O, ducere O G H, ſecantem latus A B, in G, & occurrentem M A, protractæ indefinite in H, vt triãgulum H A G, ſit ad parallelogrammum A C, in data proportione.

Data proportio ſit, quam habet R, ad S. Punctum autem O, poteſt cadere, vel in B, vel in C, vel inter C, B, vel tandem vltra C. Si cadit in *B*, vt in prima figura. Problema eſt facilis ſolutionis. Nam ſi fiat, vt S, ad R, ſic dupla D A, ad A H, & iungatur *B* H, triangulum H A *B*, erit quæſitum. Nam triangulum H A B, ad triangulum, cuius baſis dupla A D, & eadem altitudo cum altitudine trianguli H A B, eſt vt H A, ad

duplam

duplam A D, nempe ex constructione vt R, ad S. Sed triangulo cuius basis A D, & altitudo, altitudo trianguli H A B, seù parallelogrammi A C, est æquale parallelogrammum A C. Quare patet propositum.



SI autem cadit in C, vel inter B, C, vel vltra C. In omnibus istis casibus fiet eadem constructio. Ad euitandam verò confusionem ponemus tantùm figuram, in qua cadit inter B, C. Vnusquisque etenim poterit applicare eandem constructionem cæteris casibus. Producatur *B* A, in K, vt A K, sit æqualis *B* O; deinde fiat vt S, ad R, sic parallelogrammum A C, ad aliud, cuius duplo applicetur ad rectam K A, in angulo K A D, æquale, quod sit K M, & vbicumque secet A *D*, etiam productam, si opus sit, compleatur parallelogrammum K N, & ad datam rectam lineã A M, in angulo *B*AM, applicetur parallelogrammũ A P, æquale parallelogrammo A N, excedens rhombo M P, secans A *B*, in puncto G, & per puncta O G, ducatur O G H, occurrens D A,

in

in H, & faciens triangulum H A G. Dico triangulum H A G, esse quæsitum.

Quoniam enim parallelogrammum A N, est æquale parallelogrammo A P. Communeablato parallelogrammo A G. Ergo parallelogrammum reliquum G N, erit æquale rhombo M P; & sunt in eodem angulo, quippe tàm angulus B G Q. quàm angulus Q M T, externi, sunt æquales interno, & opposito G A M. Ergo vt B N, seù A M, ei æqualis, ad M Q, seù ad A G, ei æqualem, ita M Q, ad Q N, seù A G, ad G B Sed vt A G, ad G B, sic (propter similitudinem triangulorum H A G, G B O, sunt enim similia, quia H A, B O, sunt parallelæ) ita H A, ad B O, seù ad A K, (supra enim facta est A K, æqualis ipsi B O.) Quare, & vt M A, ad A G sic H A, ad A K. Ergo, quod fit sub extremis, est æquale facto sub medijs, dummodo omnia sint facta sub eodem angulo, vt ab alijs ostenditur, sed præcipuè à Caualerio lib 2. Geometr. indiuid. propos. 7. Ergo quod fit sub M A, in A K, nempe parallelogrammum M K. erit æquale ei, quod fit sub H A, in A G, nempe parallelogrammo duplo trianguli H A G; quia duo anguli K A M, & H A G, ad verticem sunt æquales. Ergo, & illorum dimidia erunt æqualia, nempe triangulum H A G, erit æquale dimidio parallelogrammi K M. Sed dimidium parallelogrammi K M, est ad parallelogrammum A C, vt R, ad S; (factum est enim supra, vt S, ad R sic parallelogrammũ A C, ad aliud, cuius duplum factũ est parallelogrammũ K M.) Quare, & vt R, ad S, sic triangulum H A G, ad parallelogrammum A C. Quod erat faciendum.

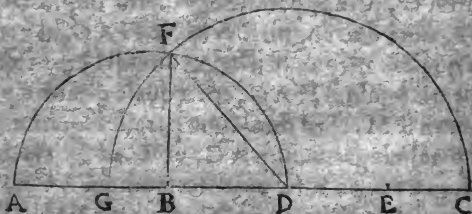
SCHO-

SCHOLIVM.

QVamuis in hoc Problemate ſint deſignata tantùm duo ſchemata ad euitandam confuſionem, attamen propter diuerſitatem caſus O, & diuerſitatem applicationum parallelogramorum, conſtituerentur 12. Schemata diuerſa, vt experienti patebit. In omnibus tamen caſibus, præterquam in primo, fiet eadem conſtructio.

LEM. LXXVI. PROP. CXXXIII.

Datam rectam lineam taliter producere, vt quadratum datæ, vna cum duobus rectangulis ſub data, & ſub inuenta, ad quadratum inuẽtæ: ſit in data proportione.



DAta recta linea ſit A B, quam oportet taliter producere in C, vt quadratum A B, cum duobus rectan-

ctangulis A B C, ſit ad quadratum B C, in data proportione, quæ ſit ea, quam habet A B, ad B D, ei poſitam in directum. Super A D, diametro fiat ſemicirculus, & B D, ſumatur dupla B E, à puncto autem B, erigatur normalis B F, & iuncta D F, centro D, interuallo D F, deſcribatur ſemicirculus ſecans B E, productam in C, & in G, vbilibet. Dico A B, datam, eſſe productam in C, ſic, vt quadratum A B, cum duobus rectangulis A B C, ſit ad quadratum B C, vt A B, ad B D.

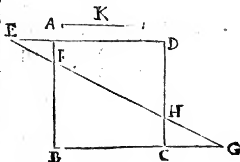
Quoniam enim duo rectangula A B D, & C B G, ſunt æqualia inter ſe, quia ambo æqualia eidem quadrato BF, & cum rectangulum C B G, ſit æquale tectangulo BCE, quia G B, & C E, ſunt æquales, vt facilè patet conſideranti. Ergo rectangulum A B D, erit æquale rectangulo B C E. Et communi addito rectangulo C B E. Ergo duo rectangula A B D, & C B E, erunt æqualia rectangulis B C E, & C B E, nempe quadrato B C. Verùm vt A B, ad B D, ſic (ſumpta communi altitudine A B,) eſt quadratum A B, ad rectangulum A B D. Pariter vt A B, ad B D, ſic (ſumpta communi altitudine B C,) eſt rectangulum A B C, ad rectangulum C B D; vt autem vnum ad vnum, ſic duo ad duo. Ergo, & vt A B, ad B D, ſic duo rectangula A B C, ad duo rectangula CBD, nempe ad rectangulum C B E. Cùm ergo probatum ſit eſſe, vt A B, ad B D, ſic tàm quadratum A B, ad rectangulum A B D, quàm duo rectangula A B C, ad rectangulum C B E. Ergo, & vt A B, ad BD, ſic ambo antecedentia ad ambo conſequentia, nempe quadratum A B, vna cum duobus rectangulis A B C, ad rectangulũ

ABD, cum rectangulo CBE. Sed istis probatum est supra æquale esse quadratum BC. Ergo, & vt AB, ad BD, sic quadratum AB, cum duobus rectangulis ABC, ad quadratum BC. Quod erat faciendum.

PROBL. LVIII. PROP. CXXXIV.

Dato quocumque parallelogrammo, ABCD, & dato puncto G, in BC, producta; ducere GHFE, occurrentē DA, productæ in E, vt trapezium FADH, sit ad triãgulum EAF, in data proportione.

DAta proportio sit, quam habet BC, ad K, & DA, per propos. anteced. taliter producatur in E, vt quadratum DA, cum duobus rectangulis DAE, sit ad quadratum AE, vt BC, ad K. Et ducatur GE, secans latera DC, AB, in punctis H, & F. Dico factum esse, quod proponebatur.



Quoniam enim triãgula DEH, AEF, sunt similia. Ergo triangulum DEH, erit ad triãgu-

gulum A E F, vt quadratem D E, ad quadratum A E. Et diuidendo, trapezium D A F H, erit ad triangulum A E F, vt excessus quadrati D E, super quadratum A E, ad quadratum A E. sed talis excessus est æqualis quadrato D A, & duobus rectangulis D A E. Ergo, & vt quadratum D A, cum duobus rectangulis D A E, ad quadratum A E, seù vt B C, ad K; sic trapezium D A F H, ad triangulum A E F. Quod erat faciendum.

PROBL. LIX. PROP. CXXXV.

Datis duobus circulis circa eandem diametrum, quorum vnus sit intra alium, aptare per cētrum minoris lineam in maiori, vt segmēta intercepta inter circumferentias circulorum, sint in data proportione.

Datorum circulorum diametri sint A B, C D. E verò sit centrum minoris; data verò ratio sit, quam habet D E, ad H. Oportet ducere P O E L M, vt M L, ad P O, sit vt D E, ad H. Vel circuli sunt concētrici, vel excentrici. Si sunt cōcentrici, patet Problema non posse solui nisi in proportione æqualitatis, & tunc omnis linea aptata in maiori circulo transiens per cen-

trum minoris facit propositum. Si verò sunt excentrici, vel se tangunt intus, vel non se tangunt, quamuis notemus tantùm schema, in quo non se tangunt; & proportio vel est æqualitatis, vel inæqualitatis, & si est inæqualitatis, si est maioris inæqualitatis, nequit esse maior ea, quam habet B D, ad C A. Si verò sit minoris inæqualitatis, nequit esse minor ea, quam habet A C, ad D B. Ratio est, quia ex omnibus segmentis intercept is inter circumferentias linearum aptatarum in circulo maiori, & transeuntium per punctum E, D B, est maximum omnium, & A C, minimum, vt facilè potest probari. His præmissis.

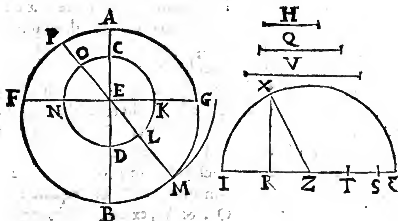
A puncto E, erigatur super A B, E F, secans circumferentiam minoris circuli in N; quæ producatur ad K, G. Et ob euitandam confusionem in schematibus, exponantur seorsim R T, æqualis E K, seu E D, & Q, potens

tens excessũ quadrati E G, super quadrato E K;& fiat vt H, ad R T seù ad E D, sic R T, ad T S, sibi ipsi positam in directum. Et pariter fiat vt H, ad R T, sic Q, ad V, & inter Q, V, inueniatur media proportionalis, cui æqualis fiat R X, erecta normaliter super R T, à puncto R; & diuisa R T, bifariam in Z, & iuncta Z X, centro Z, interuallo Z X, describatur semicirculus secans R T, productam in I, & 3. Deinde centro E, interuallo æquali ipsi T I, describatur portio circumferentiæ circuli occurrens circumferentiæ maioris circuli in puncto M. (Occurret enim semper, vt infra probabitur,) & per puncta M, & E, ducatur linea M L E O P. Dico talem esse ductam, vt sit sicut E D, ad H, sic M L, ad P O.

Quoniam enim tota Z I, est æqualis totæ Z 3, & Z R, est facta æqualis Z S; ergo, & reliqua I R, erit æqualis reliquæ S 3. Quare & rectaugulum S I R, erit æquale rectangulo 3 R I. Sed rectangulum 3 R I, est æquale quadtato X R, quadratum autem X R, est æquale rectangulo contento sub Q, & V, ex constructione. Ergo rectangulum S I R, erit æquale rectangulo contẽto sub Q, & V. Quoniam verò supra factum est, vt H, ad R T; sic Q, ad V, vt autem Q, ad V, sic (sumpta communi altitudine Q,) est quadratum Q, ad rectangulum Q, V, & rectangulo Q, V, ostensum est supra æquale rectangulum S I R. Ergo, & vt H, ad R T, sic quadratum Q, ad rectangulum S I R. Pariter quoniã supra factum est, vt H, ad R T, sic R T, ad T S, vt autem R T, ad T S, sic (sumpta communi altitudine I R,) rectangulum T R I, ad rectangulum sub S T, in I R.

Ergo,

Ergo, & vt H, ad R T, ſic rectangulum T R I, ad rectangulum ſub T S, in I R. Sed & vt H, ad R T, ſic ſupra probatum eſt eſſe quadratum Q, ad rectangulum S I R. Ergo & vt quadratum Q, ad rectangulum S I R, ſic rectangulum T R I, ad rectangulum cõtentum ſub S T, in R I. Cùm ergo ſit, vt H, ad R T, ſic tàm totũ quadratum Q, ad totum rectangulum S I R, quàm ab-



latum rectangulum T *R* I, ad ablatum rectangulũ S T, I *R*. Ergo, & reliquum ad reliquum erit vt totum ad totũ, ſeù vt H, ad R T. Quare, & vt H, ad R T, ſic exceſſus quadrati Q, ſuper rectangulum T *R* I, ad rectangulum T I *R*. Sed *R* T, eſt æqualis E D, vel E L; T *I*, eſt æqualis ipſi E M; *R* I, eſt æqualis ipſi L M; vnde rectangulum T R I, eſt æquale rectangulo E L M, ſeù rectangulo ſub O E, in L M; rectangulum verò T I *R*, eſt æquale rectangulo E M L; quadratum autem Q, eſt æ-

quale

quale excessui quadrati E G, super quadratum E K. Ergo, & vt H, ad D E, sic excessus quadrati E G, super quadrato E K, minus rectangulo sub O E, in L M, ad rectangulum E M L. Sed quoniam rectangulo F E G, seù quadrato E G, est æquale rectangulum P E M. Ergo, & quadratum E G, minus rectangulo O E, L M, & minus quadrato E K, seù E L, erit æquale rectangulo M E P, minus quadrato E L, & minus rectangulo O E, L M; nempe rectangulo sub E M, in P O. Quia rectangulũ M E P, diuiditur in rectangula M E O, & M E, O P; rectangulum verò M E O, diuiditur in rectangulum L E O, nempe in quadratum L E, & in rectangulum M L, E O. Ergo & vt H, ad D E, sic rectangulũ M E, P O, ad rectangulum E M L. Sed vt rectangulum M E, P O, ad rectangulum E M L, sic (propter eandem altitudinem M E,) est P O, ad L M. Ergo, & conuertendo vt D E, ad H, sic M L, ad P O. Quod erat &c.

Quòd verò circulus factus cẽtro E, interuallo æquali ipsi H I, semper occurrat circumferentiæ maioris circuli, facilè patebit ex processu demonstrationis, & ex determinationibus Problematis. Quia, si non occurreret, sed caderet vel totus intra, vel totus extra, probaretur eodẽ discursu, proportionem datam esse maiorem ea, quam habet B D, ad C A; vel minorem ea, quam habet C A, ad B D, vt consideranti, & experienti patebit.

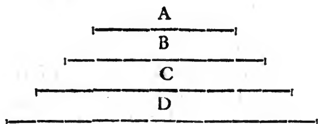


LEM-

LEM·LXXVII·PROP·CXXXVI

Si ſint quatuor rectæ lineæ continue proportionales, erit, vt quadratum primæ minoris, ad exceſſum quadrati mediæ minoris ſuper ipsã ſic media minor ad exceſſum quartæ ſuper ipſam.

SInt quatuor rectæ lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Dico eſſe, vt quadratum A, ad exceſſum quadrati B, ſuper quadratum A, ſic B, ad exceſſum D, ſuper ipſam.



Quoniam enim D, C, B, A, ſunt quatuor continue proportionales, erit, vt D, ad B, ita quadratum B, ad quadratum A. Quare, & per conuerſionem rationis, erit vt D, ad exceſſum illius ſuper B, ſic quadratum B, ad exceſſum illius ſuper quadratum A. Ergo, & diuidẽdo, vt B, ad exceſsum D, ſuper B, ſic quadratum A, ad exceſsum quadrati B, ſuper ipſum. Quod erat &c.

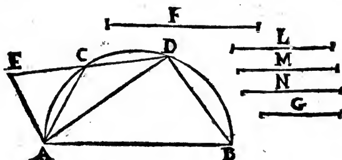
LEM.

LE. LXXVIII. PROP. CXXXVII.

Sit ſemicirculus A C B, cuius diameter A B, & eius peripharia ſubtendatur à tribus chordis A C, C D, & D B; D C, autem ſit producta verſus C, indefinite, & à puncto A, ſit ducta ſuper ipſam normalis A E. Dico parallelepipedum factum ſub A B, in rectangulum E C D, eſſe æquale ſolido facto ſub D B, in rectangulum A C D.

Dvcatur A D. Quoniam duo anguli A C D, & D B A, ſunt æquales duobus rectis, quia quadrangulum A C D B, eſt in circulo; & pariter duo anguli A C E, & A C D, ſunt æquales duobus rectis. Ergo duo ſunt æquales duobus. Quare communi ablato angulo A C D, ergo angulus A C E, erit æqualis angulo A B D. Et pariter angulus rectus A E C, eſt æqualis angulo recto A D B. Quare, & reliquus erit æqualis reliquo; & triangulum A E C, erit ſimile triangulo A D B. Ergo, vt E C, ad C A, ſic D B, ad B A. Sed

vt E C, ad C A, sic (sumpta communi altitudine C D,) est rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo



& vt D B, ad B A, sic rectangulum E C D, ad rectangulum A C D. Ergo solidum factum sub extremis erit æquale facto sub medijs. Ergo factum sub D B, in rectangulum D C A, erit æquale facto sub A B, in rectangulum E C D. Quod erat ostendendum.

LE.LXXIX. PROP. CXXXVIII.

Datis ijsdem, quæ supra. Dico quadratum A B, esse æquale tribus quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D.

NAM quadratum A B, est æquale duobus quadratis B D, & D A. Quadratum autem D A, est

est æquale duobus quadratis A E, & E D, quia tam angulus A E D, quam A D B, sunt recti. Quadratum autem E D, est æquale quadrato E C, quadrato C D, & duobus rectangulis E C D; & pariter duo quadrata A E, E C, sunt æqualia quadrato A C. Ergo à primo ad vltimum, quadratum A B, erit æquale quadratis B D, D C, & C A, & duobus rectangulis E C D. Quod erat ostendendum.

PROBL. LX. PROP. CXXXIX.

Datis tribus rectis lineis, inuenire semicirculum, cuius periphæria subtendatur ab ipsis.

DAtæ tres rectæ lineæ sin L, M, N, & oporteat facere, quod imperatum est. Tunc vel omnes sunt inæquales, vel sunt duæ illarum æquales. Si duæ sunt æquales soluetur Problema per locum planũ. Sint ergo L, & M, æquales, & ipsi N, fiat æqualis A B. A puncto B, erigatur perpendicularis B E, cuius quadratum sit duplum quadrati L, vel M, & diuidatur A B, bifariam in P, & iungatur P E. Centro autem P, interuallo P E, describatur semicirculus, cui occurrat A B, producta in punctis O, & F, & super A F, tamquam supra diametro fiat semicirculus A G F, & à puncto A, aptetur A G, æqualis A B, & circumferentia G F, secetur bifariam in H, & iungantur G H, H F, & H B, & du-

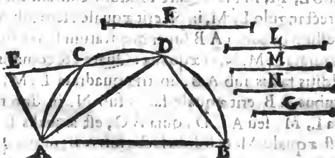
 catur

catur à puncto H, perpendicularis H K, ipsi A F. Dico G H, & H F, esse æquales ipsi L, & M, & semicirculũ A G F, esse quæsitum.

Quoniam enim circumferentia G F, est secta bifariam in H. Ergo angulus G A H, est æqualis angulo H A B. Sed etiam duæ lineæ G A, A H, sunt æquales duabus lineis H A, A B, altera alteri. Ergo triangulũ G A H, erit æquale triangulo H A B, & G H, erit æqualis H B. Sed G H, est æqualis H F. Ergo B H, erit æqualis H F. Quoniam autem duobus quadratis B K, & K H, est æquale quadratum B H, & pariter duobus quadratis H K, K F, est æquale quadratum H F, & duo quadrata B H, & H F, sunt inter se æqualia, quia & latera B H, & H F, ostensa sunt æqualia. Ergo duo quadrata B K, H K, erunt æqualia duobus quadratis H K, K F. Et communi ablato quadrato H K. Ergo, quadratum B K, erit æquale quadrato K F, & B K, erit æqua-

æqualis K F. Ergo rectangulum A F B, erit duplum rectanguli A F K. Sed rectangulo A F B, est æquale rectangulum O B F, quia B F, est æqualis O A; & rectangulum O B F, est æquale quadrato B E, & pariter rectangulum A F K, est æquale quadrato F H. Quare, & quadratum B E, erit duplum quadrati F H. Sed pariter, quadratum B E, factum est duplum quadrati L, vel M. Ergo quadratum F H, est æquale quadratis L, vel M, & F H, & H G, sunt æquales ipsis L, & M, & A G, facta est, æqualis A B, seu N. Ergo inuentus est semicirculus &c.

SI verò tres L, M, & N, sint inæquales, soluetur Problema per locum solidum, demonstratione comprehendente etiam casum antecedentem. Exponatur linea F, potens simul tria quadrata L, M, N, & fiat vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G; & data F, minori extrema, & G, differentia secundæ, & quartæ in ordine quatuor continuè



proportionalium, inueniatur secunda A B, quæ fiat dimetiens semicirculi. Quoniam A B, est maior F, hoc

Nn 3 est

est tribus quadratis L, M, & N. Quare, si aptentur duæ ipsarum L, M, & N, in semicirculo, cuius diameter A B, ipsum totum non occupabunt. Aptetur A C, æqualis L, & C D, æqualis M, & D B, ducatur. Dico D B, esse æqualem N, & semicirculum A C D B, esse quæsitum. Producatur D C, versus C, indefinite, cui à puncto A, occurrat perpendicularis A E, & ducatur A D. Quoniam sunt quatuor continue proportionales, quarum prima minor est F, & G, est excessus quartæ super secundam, & A B, est secunda. Ergo per proposit. 136. erit vt quadratum F, ad excessum quadrati A B, super ipsum, ita erit A B, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale facto sub excessu quadrati A B, super quadratum F, in A B. Pariter quoniam supra factum est vt quadratum F, ad duplum rectangulum contentum sub M, & N, sic L, ad G. Ergo factum sub quadrato F, in G, erit æquale solido contento sub duplo rectangulo M, N, in L, seu solido contento sub duplo rectangulo L, M, in N. Quare solidum contentum sub duplo rectangulo L, M, in N, erit æquale facto sub A B, in excessum quadrati A B, super quadratum E, seu super tria quadrata L, M, N, ei æqualia. Quare, & communibus additis factis sub A B, in tria quadrata L, M, N. Ergo cubus A B, erit æquale factis sub N, in duo rectangula L, M, seu A C D, quia A C, est æqualis L, & C D, est æqualis M, & solidis factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, & N. Et quoniam per proposit. antec. quadratum A B, æquatur quadratis A C, C D, D B, & duobus rectangulis E C D. Ergo, & cubus A B, erit æ-

quale

quale factis sub A B, in tria quadrata A C, C D, D B, & in duo rectangula E C D. Ergo & hæc facta erunt æqualia factis sub A B in quadrata L, & M, seù in quadrata A C, C D, & in quadratum N, & in duo rectangula A C D. Et communibus ablatis factis sub A B, in quadrata A C, C D. Ergo factum sub A B, in quadratum D B, cum facto sub A B, in duo rectangula E C D, seù sub D B, in duo rectangula A C D, quæ illis sunt æqualia, per proposit. 137 erunt æqualia factis sub AB, in quadratum N, & sub N, in duo rectangula A C D. Ex vtraque parte sunt duo æqualia, nempe duo rectangula A C D, & A B. Ergo, & N, erit æqualis D B. Quod erat ostendendum.

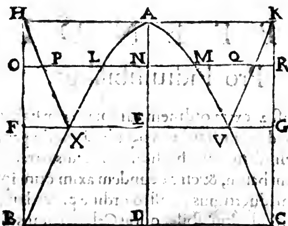
APPENDIX

Pro Indiuisibilibus.

PRopos. 2 extra ordinem sumpta, quæ habetur pag. 116. demonstrauimus peculiari modo per Indiuisibilia, Cylindrum esse duplum Conoidis parabolici super eandem basim, & circa eundem axim cum ipso. At nunc animaduertimus, nostro ordine procedendi, posse concludi illud admirabile, quod Celeberrimus Galilæus habet in postremis Dialogis, pag. apud nos 28. Nimirũ circuli circumferentiam æqualem esse puncto. Modum Galilæi videat Lector, loco supra citato. Noster autem sequens est non aliter discrepans à Methodo Galilęi, nisi quia vtimur solidis diuersi ab ijs, quibus ipse vtitur.

Pro-

Proposit. ergo supra citata, cuius schema denuo ponimus ostendebamus, quod si accepto in A E, vbilibet puncto N, per quod ordinatim applicaretur O P L N, semper verum esse circulum, cuius radius O N, æqualem circulis, quorum radij P N, N L. Sed non solùm hoc verum est, sed etiam armillam circularem, signatam litteris O P Q R, æqualem esse circulo L N M. Quod patet faciliter; quia cum quadratum O N, sit æquale tam duobus quadratis P N, N L, quàm quadrato P N, & rectangulo O P R, sequitur (dempto communi quadrato P N;) rectangulum O P R, remanere æquale quadrato L N; ac proinde, armillam O P Q R, esse æqualē circulo L N M; & cum hoc semper verificetur, etiam verificari, excessum Cylindri H G, qui signatur litteris H F X V G K, supra frustum parabolicū H X V K, æqualem esse portioni Conoidis X A V, tàm secundum



totum,

totum, quàm ſecundum partes. Vnde cum v g. pars HOPQR K, ſit æqualis LA M, portioni conoidis, & hoc ſemper verum ſit; ſequitur etiam, quod cum tandem ex continua diuiſione deueniamus ad circumferẽtiam, cuius diameter H K, & ad A, verticem conoidis, etiam circumferentiam eſſe æqualem vertici, nempe puncto. Circa hoc non immoror, quia faciliſſimè, & clariſſimè explicatur à Galilæo, ac eodem modo debet in caſu noſtro philoſophari.

At P. Marius Bettinus Societatis Ieſu, Vir, qui cum fuerit author Apiariorum poteſt Apis nuncupari; quia ſicut hæc habet vnde, & mellificet, & pungat, ſic hic mellificat, ſuauiſſimam doctrinam docendo, pungitquè ſuo aculo non rectè de Mathematicis, ſecundum ipſum, ſentientes. At Apis infelix, quæ ſtimulum ammittens feriendo Indiuiſibilia, periclitata eſt. Author ergo iſte parui pendens, quæ in paradoxo Galilæi aït Illuſtriſſimus Interlocutor Sagredo Conciuis meus verbis, quæ loco Galilæi citato, poſſunt conſpici, tom.3. ſui Ærarij pareg Geom.ſchol.1 & alibi, notat aliqualiter Galilęi paradoxum, vnde, nec noſtrum omnimodè ei placeret. Admonet ergo nõ eſſe intelligendum, circumferentiam æqualem eſse puncto ſic abſolutè, & Geometricè, ſed phyſicè. Attamen deducimus ex hoc veritatem pulcherrimam, nimirum inter phyſica indiuiſibilia vnum aliud multum phyſicè excedere. Nam cùm verum ſit, phyſicè loquendo, circumferentiam, cuius diameter HK, æqualem eſſe puncto A, & poſſimus concipere Cylindrum in infinitum baſium maiorum, & in eo inſcriptũ

Conoi-

Conoides, vt supra factum est, & semper circumferentia sit æqualis, physicè loquendo, vertici conoidis, & tamen, & hæ circumferentiæ, & hi vertices sint quantitates physicæ, adeò vt inter ipsas cadat vera proportio æqualitatis. Sequitur, quod permutando, quam proportionem habet circumferentia maior, & vt ita dicam, maxima, ad paruissimam circumferentiam, hanc eandem habeat vertex conoidis maximi ad verticẽ conoidis paruissimi. Vnde vertex conoidis maximi excedet, vt ita dicam, infinitè, verticem conoidis paruissimi; & tamen vterque vertex, est punctum physicè indiuisibile. Et vtique admirabilissimum est considerare; quantum possimus concipere distrahi indiuisibile physicum, vt vertex coni, vel conoidis, physicè accepti, æquetur circumferentiæ circuli, quæ causa suę immensitatis, quæ potest concipi, infinita queat appellari.

Verùm P. Bettinus loc. sup. cit. §. 28. &c. adducit paradoxum longè, vt ipse appellat, mirissimum; nimirum, non solum circumferentiam, sed circulum totum, æqualem esse puncto. Sed vt ignorantiam meam liberè fatear, tale paradoxũ tali pacto mihi videtur mirissimũ, vt intelligentiam meam effugiat. Contra tale paradoxum aliqua Geometricè obijcerem, sed nolo verba habere cũ mortuis. Videat Lector tale paradoxum loco citato, & forsitan agnoscet, quam melius fuisset Bettino per indiuisibilia procedere, quam irrationabili liuore ipsa spernere. Sic enim ab indiuisibilibus abhorret, vt quasi ipsa lutum sint, ipse verò Armellinus, cupiat potius mori, quam fędari. Sic enim loc. sup. cit. Schol. 2. de Indiuisibi-

sibilibus loquitur: *In postremis respondeo impingentibus mihi similitudinem phylosophantium circa figuras Geometricas per indiuisibilia. Longè longius à me absit frustrari Geometricas meas theorias optato fine demonstrata veritatis. Quod fieret si (contra 4. definitionem lib. 5 & scholia nostra ad eam) compararem inter se, quæ Geometricam inter se proportionem non habent, qualis est comparatio figurarum, & phylosophatio circa eas per indiuisibilia.* Intelligis ergo Lector, quomodo author iste in indiuisibilia incidens, quasi sibi Dæmones occurrerent exclamet: *Longè longius à me absit &c.* Sed cum contra indiuisibilia Author iste anno 1648. nihil, præter nouum liuorem, noui adducat ab ijs, quæ contra ea obiecit Paulus Guldinus in sua centrobarica, quibus abundè satisfecit ipsemet Indiuisibilium inuentor Bonauentura Caualerius in suis exercitationibus Geometricis exercitat. 3. anno 1647. quo, maxima Mathesis iactura, vitam cum morte cōmutauit; ideò nec nos circa hoc debemus nouiter verba profundere.

SCHOLIVM.

HÆc sunt, Benigne Lector, quæ pro hac vice determinauimus tibi legēda proponere. Quamplurima adhuc tenemus diuersis temporibus à nobis elaborata, pręcipuè circa proportiones Superficierum Sphęricarum, & Conicarum, quę suis temporibui tradentur, si Deus sanitatem, & vitam impertierit. Hęc perlege, si tibi placet, reliqua in non modica quanti-

tate

tate, vel his pulchriora, vel his turpiora expecta. Tabellam errorum, vt moris est, tradere, non exhibemus, sed ipsos corrigere tuæ industrię relinquimus, pręcipuè cum adhibita aliquali diligentia, faciliter cognosci possint. Et vale.

FINIS.

